ESERCIZI SULLE EQUAZIONI LOGARITMICHE

Ripasso
Prima di esaminare le equazioni logaritmiche ripassiamo la definizione di logaritmo e le principali proprietà dei logaritmi.
Definizione di logaritmo di b in base a
Dati due numeri **positivi a e b,** il **logaritmo** di un numero b, detto *argomento*, rispetto a numero a, detto *base,* è **l'esponente** x a cui si deve elevare a per avere b.
Si indica con $x = \log_a b$; x è il logaritmo di b rispetto ad a se $\Leftrightarrow a^x = b$

Esempi: $\log_3 27 = 3$ perché $3^3=27$ $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ perché $5^{-2}=1/25$.
IMPORTANTE
Non esiste il logaritmo di 0 né di un numero negativo, perchè per definizione a e b sono numeri positivi.
La base del logaritmo a deve essere diverso da 1 perché $1^x=b$ è un'equazione impossibile se $b\neq1$ o indeterminata se b=1.
Ricordiamo che:
$\log_a 1 = 0$ perché ogni numero elevato a zero è uguale a 1.
$\log_a a = 1$ perché ogni numero elevato ad uno è uguale a se stesso.
Le proprietà fondamentali dei logaritmi sono tre:
I) $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$: il logaritmo del prodotto di due numeri positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori.
II) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$: il logaritmo del quoziente di due numeri positivi è uguale alla differenza tra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore.
.III) $\log_a b^n = n \log_a b$: il logaritmo della potenza di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponente della potenza per il logaritmo della base.

Definizione di equazione logaritmica

Diamo ora la definizione di **equazione logaritmica** in un'incognita
Un'equazione, ad un'incognita, si dice logaritmica quando **l'incognita compare nell'argomento** di almeno un logaritmo. L'equazione si presenta del tipo $\log A(x) = \log B(x)$.
Esempio sono logaritmiche le seguenti equazioni:
1) $\log_5 x + \log_5 3 = \log_5 6$ 2) $\log(x-1) - \log(x-2) = \log 3$ 3) $\log x + \log(x-1) = \log 3x$
4) $3\log^2 x - 2\log x = 0$ 5) $\log_3 x(3\log_3 x - 4) + 1 = 0$
Invece non è logaritmica la seguente equazione $(x-1)\log_5 7 + \log_5 3 = x\log_5 6$ perché l'incognita non si trova in alcun argomento.

Procedimento di risoluzione delle equazioni logaritmiche

In generale per risolvere le equazioni logaritmiche si eseguono i seguenti passaggi:
- calcolare il campo di esistenza di tutti i logaritmi presenti
- ridurre entrambi i membri dell'equazione in un unico logaritmo in modo da avere un unico logaritmo a sinistra ed un unico logaritmo a destra cioè ridurre l'equazione nellaforma $\log A(x) = \log B(x)$.
- uguagliare l'argomenti dei logaritmi al I e al II membro $A(x) = B(x)$.

- risolvere l'equazione $A(x) = B(x)$.
- controllare se le soluzioni verificano tutti i campi di esistenza, ed eventualmente scartare i valori che non rispettano il C.E.

Chiariamo come si risolvono le equazioni logaritmiche svolgendo i seguenti esercizi

1) $\log_5 x + \log_5 3 = \log_5 6$

iniziamo con il calcolare il **campo di esistenza** del logaritmo $\log_5 x$:poiché per definizione l'argomento di un logaritmo è positivo il C.E. è x>0.

Trasformiamo adesso **il primo membro** dell'equazione **in un unico logaritmo**: applichiamo la formula del prodotto $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$ con b = x e c = 3 e l'equazione diventa $\log_5 3x = \log_5 6$.

Uguagliamo gli argomenti dei logaritmi ai due membri: 3x=6 ed otteniamo un'equazione lineare la cui la soluzione è x=2, **controlliamo se tale valore rientra nel C.E.**: ora poiché 2>0 la soluzione è accettabile.

2) $\log(x-1) - \log(x-2) = \log 3$

Calcoliamo i C.E. dei due logaritmi al I membro: x-1>0 da cui x>1 e x-2 >0 da cui x>2; ora il C.E. di tutto l'esercizio è costituito dai valori delle x che verificano contemporaneamente tutti i C.E. quindi il C.E.complessivo è x>2.

Trasformiamo adesso il primo membro dell'equazione in un unico logaritmo: applichiamo la formula del quoziente $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ con b = (x-1) e c = (x-2) e l'equazione diventa $\log \frac{x-1}{x-2} = \log 3$.

Uguagliamo gli argomenti: $\frac{x-1}{x-2} = 3$ e risolviamo l'equazione così ottenuta (in questo caso è un'equazione fratta il C.E. è x≠2 e il m.c.m è (x-2)) $\frac{x-1}{x-2} = 3 \rightarrow \frac{x-1}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} \rightarrow x-2 = 3x-6$

$\rightarrow x-3x = -6+2 \rightarrow -2x = -4 \rightarrow$ 2x=4 da cui la soluzione x=2, che **non è accettabile** perché non è maggiore di 2. L'equazione non ha soluzioni.

3) $\log x + \log(x-1) = \log 3x$

Calcoliamo i C.E. dei due logaritmi al I membro: x>0 e x-1 >0 da cui x>1; i valori delle x che verificano contemporaneamente tutti i C.E. (e quindi il C.E.complessivo) è x>1.

Trasformiamo adesso il primo membro dell'equazione in un unico logaritmo: applichiamo la formula $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$ con b = x e c = (x-1) e l'equazione diventa $\log x(x-1) = \log 3x$.

Uguagliamo gli argomenti: $x(x-1) = 3x$ e risolviamo l'equazione così ottenuta (in questo caso è un'equazione di II grado spuria) $x^2 - x = 3x \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow$ x=0 e x=4. Tra le due soluzioni l'unica che verifica il C.E. è x=4 perché 4>1. (0 non è accettabile).

Esaminiamo un altro tipo di equazioni logaritmiche, che si risolvono mediante una particolare sostituzione $t = \log_a x$

4) $3\log^2 x - 2\log x = 0$

Dopo aver calcolato il C.E. che risulta essere x>0 (perchè x è argomento di tutti i logaritmi presenti nell'equazione), per risolvere l'equazione si usa la sostituzione $t = \log x$, per cui l'equazione diventa

$3\log^2 x - 2\log x = 0 \rightarrow 3t^2 - 2t = 0$ che è un'equazione di II grado spuria

$3t^2 - 2t = 0 \rightarrow t(3t-2) = 0$ da cui le soluzioni t=0 e t=2/3. Per calcolare i valori di x dobbiamo ricordare la sostituzione $t = \log x$ e risolvere le seguenti equazioni logaritmiche logx=0 e logx=2/3

logx=0 da cui $x=10^0=1$ soluzione accettabile

$\log x = 2/3 \rightarrow x = 10^{2/3} \rightarrow x = \sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3]{100}$ soluzione accettabile.

5) $\log_3 x(3\log_3 x - 4) + 1 = 0$

Calcoliamo il C.E.: x>0, eseguiamo tutti i passaggi al primo membro: $\log_3 x(3\log_3 x - 4) + 1 = 0$ $\rightarrow 3\log_3{}^2 x - 4\log_3 x + 1 = 0$. Usiamo la trasformazione $t = \log_3 x$ e l'equazione diventa $3t^2 - 4t + 1 = 0$, che è un'equazione di II grado completa che si risolve con la formula risolutiva: $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$ da cui $t_1=6/6=1$ e $t_2=2/6=1/3$.

Risolviamo le seguenti equazioni $\log_3 x = 1$ e $\log_3 x = 1/3$

$\log_3 x = 1$ dà la soluzione $x=3^1=3$ che è accettabile (3>0)

$\log_3 x = 1/3$ dà la soluzione $x = 3^{1/3} \rightarrow x = \sqrt[3]{3}$ anch'essa accettabile.