"APPUNTI DI GONIOMETRIA"

www.matematica.blogscuola.it

RADIANTI E CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Definizione: Si dice ***angolo*** ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi la stessa origine.

Definizione: Dicesi ***arco*** (di circonferenza) l'intersezione tra una circonferenza e un angolo al centro della circonferenza stessa.

Definizione: Si definisce ***grado*** la 360^a parte dell'angolo giro.

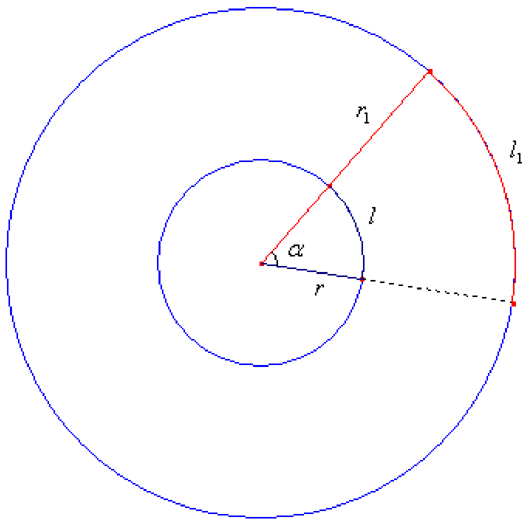
MISURA IN RADIANTI

Consideriamo un angolo α al centro di due circonferenze C e C_1 di raggi r e r_1. Detti l e l_1 gli archi corrispondenti, si ha che:

$$l : l_1 = r : r_1$$

Cioè: *date due circonferenze, due archi che sottendono angoli al centro "uguali", sono proporzionali ai rispettivi raggi*.

Se le circonferenze sono concentriche si ha che: *se un angolo al centro di una circonferenza corrisponde ad un arco lungo quanto il raggio, allora lo stesso angolo corrisponde, su qualsiasi altra circonferenza concentrica alla prima, ad un arco lungo quanto il raggio*.



Definizione: Si definisce ***radiante*** l'angolo al centro di una circonferenza che corrisponde ad un arco di lunghezza uguale al raggio.

Se g è la misura in gradi di un angolo e α la misura in radianti dello stesso angolo, si ha:

$$360° : 2\pi = g : \alpha$$

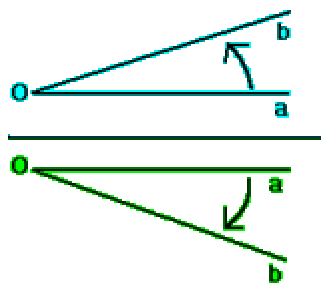
cioè:

$$\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot g$$

$$g = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha$$

GRADI	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	270°	360°
RADIANTI	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Definizione: Si definisce ***angolo orientato*** un angolo pensato come l'insieme di tutte le sue semirette uscenti dal vertice, che siano state ordinate secondo uno dei due versi possibili.

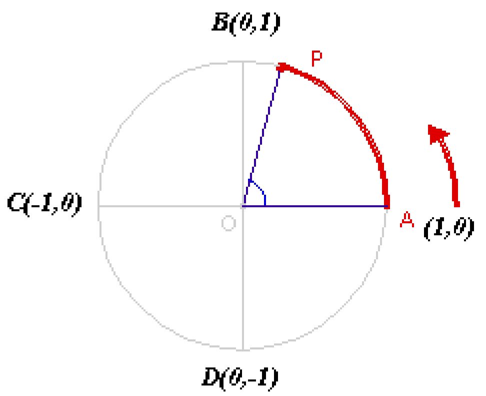


Definizioni: Un angolo orientato $\widehat{ab}$ di centro O si dice ***orientato positivamente*** quando il lato a deve ruotare in senso antiorario intorno ad O per sovrapporsi a b. Si dice ***orientato negativamente*** se la stessa rotazione avviene in senso orario.

CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Definizione: Una circonferenza si dice ***orientata*** quando su di essa è fissato un verso di percorrenza.

Definizione: Una ***circonferenza goniometrica*** è una circonferenza che ha centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio unitario.



Si assume che il punto A sia l'origine degli archi, e che il lato OA sia l'origine degli archi. Inoltre si considera come positivo il verso antiorario. Quando il punto P, partendo da A, percorre interamente la circonferenza, gli archi$\widehat{AA}$, $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{AD}$ e $\widehat{AA}$ sono rispettivamente 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, in radianti: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π .

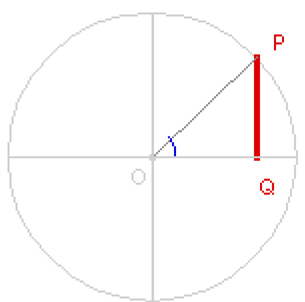
Consideriamo un punto P sulla circonferenza e sia $\widehat{AP}$ l'arco di origine A e di estremo P. Sia α la misura in gradi di $\widehat{AP}$. L'ordinata e l'ascissa di P sono funzioni dell'angolo α, cioè ad ogni valore di α corrisponde un determinato valore sia per l'ordinata che per l'ascissa del punto.

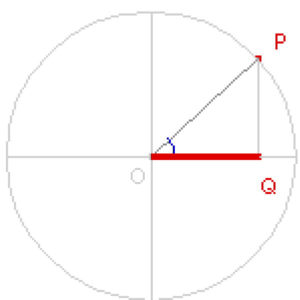
Definizioni: Dicesi ***seno*** di un arco sulla circonferenza goniometrica, l'ordinata dell'estremo dell'arco, cioè:

$$\sin\alpha = PQ$$

Dicesi ***coseno*** di un arco sulla circonferenza goniometrica, l'ascissa dell'estremo dell'arco, cioè:

$$\cos\alpha = OQ$$





SOME RIGHTS RESERVED

Si tracci ora la tangente alla circonferenza goniometrica nel punto *A* e sia *T* il suo punto d'intersezione con il prolungamento del segmento *OP*. L'ordinata del punto *T* è una funzione dell'angolo α.

Definizione: Dicesi ***tangente*** di un angolo il rapporto tra il seno e il coseno dell'angolo, cioè:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Le funzioni $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$ prendono il nome di ***funzioni circolari*** o ***funzioni goniometriche*** o ***funzioni trigonometriche***.

	$0<\alpha<90°$	$90°<\alpha<180°$	$180°<\alpha<270°$	$270°<\alpha<360°$
$\sin\alpha$	**Positivo**	**Positivo**	**Negativo**	**Negativo**
$\cos\alpha$	**Positivo**	**Negativo**	**Negativo**	**Positivo**
$\tan\alpha$	**Positiva**	**Negativa**	**Positiva**	**Negativa**

Consideriamo il triangolo APQ, per il teorema di Pitagora si ha:

$$OQ^2 + PQ^2 = OP^2 = 1.$$

Poiché $OQ = \cos\alpha$ e $PQ = \sin\alpha$, si ottiene:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

che prende il nome di ***relazione fondamentale della goniometria***.

Da questa relazione segue che:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

Inoltre la tangente dell'angolo α, come visto, risulta:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Definizione: Si definisce ***cotangente*** dell'angolo α il reciproco della funzione tangente:

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Le funzioni $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ sono funzioni ***periodiche*** di periodo 360°, cioè:

$$\sin(\alpha + k\cdot 360°) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + k\cdot 360°) = \cos\alpha$$

mentre le funzione $\tan\alpha$ e $\cot\alpha$ hanno periodo 180°, cioè:

SOME RIGHTS RESERVED

$$\tan(\alpha + k \cdot 180°) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + k \cdot 180°) = \cot\alpha$$

Nella seguente tabella sono riportati i valori delle funzioni goniometriche di particolari angoli.

	0°	***90°***	***180°***	***270°***	***360°***
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	∞	0	∞	0
$\cot\alpha$	∞	0	∞	0	∞

Osservazioni:

1. La funzione seno e la funzione coseno sono limitate al variare dell'angolo, cioè i loro valori sono sempre interni all'intervallo $[-1,1]$.
2. Le funzioni tangente e cotangente sono illimitate al variare dell'angolo, di conseguenza i loro valori variano in $\mathbb{R}$.

PARTICOLARI VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

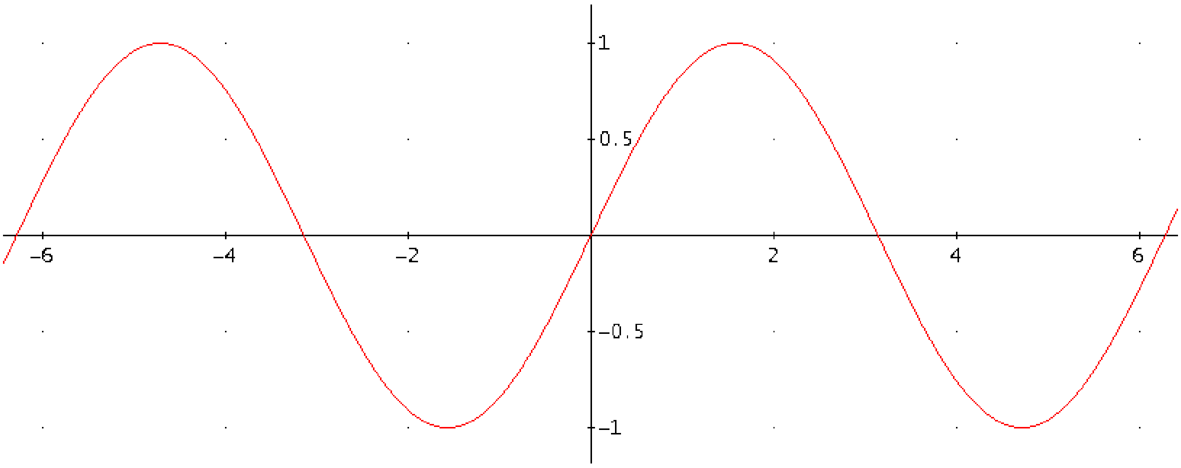
Gradi	***Radianti***	***seno***	***coseno***	***tangente***	***cotangente***
0°	0	0	1	0	*non è definita*
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	*non è definita*	0
180°	π	0	-1	0	*non è definita*
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	*non è definita*	0
360°	2π	0	1	0	*non è definita*

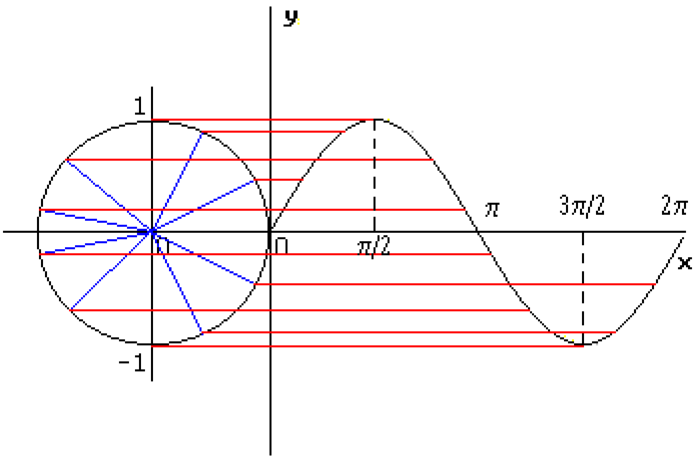
SOME RIGHTS RESERVED

GRAFICI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

GRAFICO DI $y = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	1

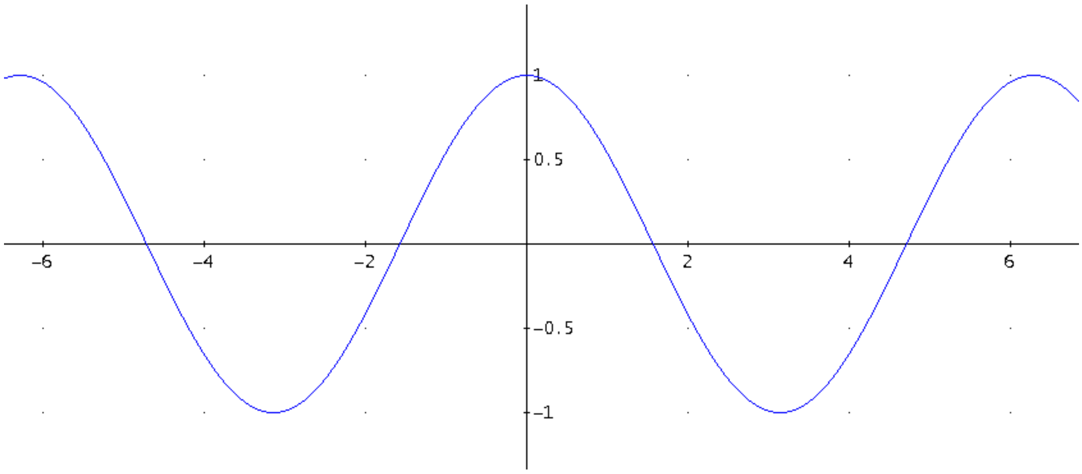


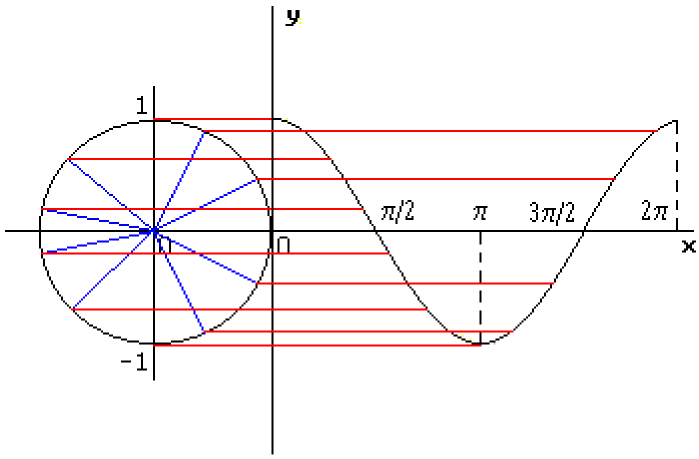


SOME RIGHTS RESERVED

GRAFICO DI $y = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$y = \cos x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

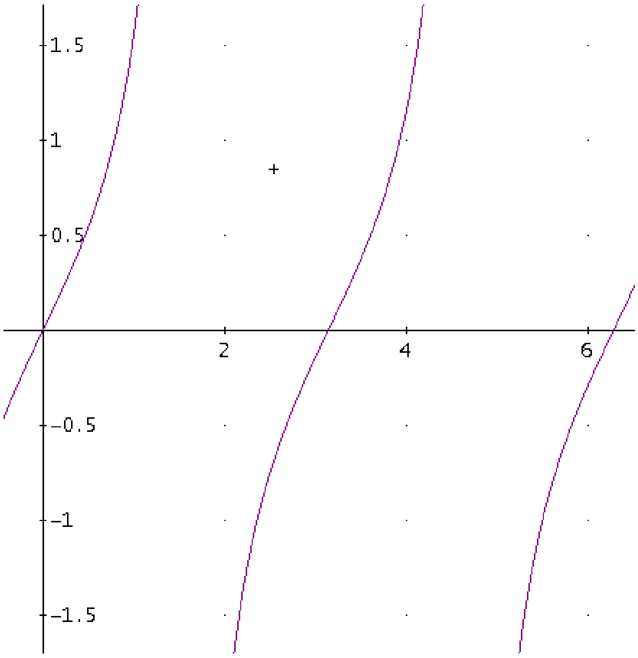




SOME RIGHTS RESERVED

GRAFICO DI $y = \tan x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$y = \tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0



SOME RIGHTS RESERVED

RELAZIONI GONIOMETRICHE

ESPRESSIONI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE PER MEZZO DI UNA DI ESSE

Da \ *Si ha*	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\tan\alpha$	$\frac{1}{\tan\alpha}$
$\cot\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cot\alpha}$	$\cot\alpha$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI OPPOSTI

Due archi si dicono ***opposti*** se sono uguali in valore assoluto ma di segno contrario.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI ESPLEMENTARI

Due archi si dicono ***esplementari*** se la loro somma è un angolo giro.

$$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(360° - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(360° - \alpha) = -\cot\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI SUPPLEMENTARI

Due archi si dicono ***supplementari*** se la loro somma è un angolo piatto.

SOME RIGHTS RESERVED

$$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(180°-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(180°-\alpha)=-\cot\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI CHE DIFFERISCONO DI 180°

Due archi differiscono di 180° se uno è α e l'altro è $180°+\alpha$.

$$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(180°+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(180°+\alpha)=\cot\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI CHE DIFFERISCONO DI 90°

Due archi differiscono di 180° se uno è α e l'altro è $90°+\alpha$.

$$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\tan(90°+\alpha)=-\cot\alpha$$
$$\cot(90°+\alpha)=-\tan\alpha$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI COMPLEMENTARI

Due archi si dicono ***complementari*** se la loro somma è un angolo retto.

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(90°-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cot(90°-\alpha)=\tan\alpha$$

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Servono a calcolare le funzioni circolari di angoli che si possono pensare come differenza o come somma di archi notevoli.

SOME RIGHTS RESERVED

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

FORMULE DI BISEZIONE

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$
$$\cot\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

FORMULE DI PROSTAFERESI

Servono a trasformare in prodotto la differenza e la somma di seni e coseni.

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

SOME RIGHTS RESERVED

FORMULE DI WERNER

Servono a trasformare il prodotto di seni, di coseni e di un seno e di un coseno nella somma o nella differenza:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

SOME RIGHTS RESERVED