I COEFFICIENTI BINOMIALI
E IL BINOMIO DI NEWTON

DEFINIZIONE DI COEFFICIENTE BINOMIALE

Il numero delle combinazioni semplici è anche indicato con il simbolo:

$$\binom{n}{k}$$

Per definizione è quindi:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Il simbolo appena introdotto è detto coefficiente binomiale per il suo uso nello sviluppo delle potenze di un binomio.

PROPRIETA' DEI COEFFICIENTI BINOMIALI

Proprietà di simmetria

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Proprietà di ricorrenza

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}$$

Proprietà di Stifel

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Casi particolari

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

SVILUPPO DELLA POTENZA DI UN BINOMIO

Consideriamo due numeri reali qualunque a e b. Sono note le formule:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Analizzando il calcolo della generica potenza di un binomio notiamo che tutti gli sviluppi sono dei polinomi omogenei e completi, di grado uguale all'esponente della potenza. Ci proponiamo di determinare la formula generale.

Consideriamo il prodotto di n fattori:

$$(a+b_1)\cdot(a+b_2)\cdot\ldots\cdot(a+b_n)=$$
$$=a^n+(b_1+b_2+\ldots+b_n)a^{n-1}+(b_1b_2+b_1b_3+\ldots+b_{n-1}b_n)a^{n-2}+(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+\ldots+b_{n-2}b_{n-1}b_n)a^{n-3}+\ldots+b_1b_2b_3\ldots b_n$$

Osserviamo che:

* a^n ha per coefficiente 1, che si può scrivere anche $\binom{n}{0}$

* a^{n-1} ha per coefficiente la somma degli n elementi dell'insieme $B=\{b_1, b_2,\ldots, b_n\}$
 si tratta di $\binom{n}{1}$ addendi

* a^{n-2} ha per coefficiente la somma dei prodotti a 2 a 2 (senza ripetizione) degli n elementi di B
si tratta di $\binom{n}{2}$ addendi

* a^{n-3} ha per coefficiente la somma dei prodotti a 3 a 3 (senza ripetizione) degli n elementi di B
si tratta di $\binom{n}{3}$ addendi

e così via.

Se ora poniamo

$$b_1 = b_2 = b_3 = \dots = b_n = b$$

perveniamo alla formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Questi coefficienti possono essere disposti secondo uno schema noto come Triangolo di Tartaglia o Triangolo di Pascal.

IL TRIANGOLO DI TARTAGLIA

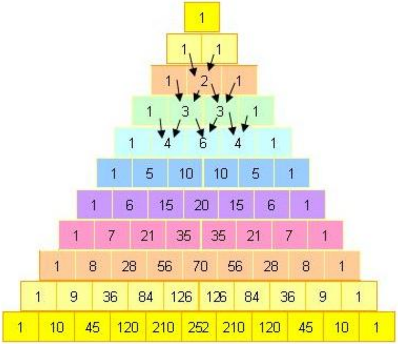
Un matematico del XVI secolo, Niccolò Fontana detto Tartaglia, nel suo "*General trattato dei numeri e misure*" del 1556 (praticamente un'enciclopedia della matematica di quei tempi), riporta una particolare figura, che ammette di non essere di sua invenzione (era già nota agli indiani e ai cinesi), che da allora porta il suo nome.

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}
$$

Per la costruzione dello schema sono sufficienti due considerazioni

1. ogni riga inizia e termina con 1 (caso particolare dei coefficienti binomiali)
2. ogni altro valore si ottiene come somma dei due elementi sovrastanti (proprietà di Stifel)



1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

ESEMPI

Calcolare la potenza $(x^2 - 2y^3)^4$

$$(x^2 - 2y^3)^4 = \binom{4}{0}(x^2)^4 + \binom{4}{1}(x^2)^3(-2y^3) + \binom{4}{2}(x^2)^2(-2y^3)^2 + \binom{4}{3}x^2(-2y^3)^3 + \binom{4}{4}(-2y^3)^4 =$$

$$= x^8 - 8x^6y^3 + 24x^4y^6 - 32x^2y^9 + 16y^{12}$$

Risolvere l'equazione $\binom{x}{3} + \binom{x-1}{2} = 2\binom{x-1}{3}$

Stabiliamo le condizioni di esistenza: il valore di x deve essere un numero naturale maggiore o uguale a 4.
Sviluppando i coefficienti binomiali si ricava l'equazione

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{6} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} = 2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$

Per le condizioni di esistenza i fattori $x-1$ e $x-2$ sono diversi da zero e possono essere semplificati; con questo si arriva all'equazione

$$\frac{x}{6} + \frac{1}{2} = \frac{x-3}{3}$$

che porta alla soluzione accettabile 9

ESEMPI

Senza sviluppare la potenza del binomio $(2a-b^2)^7$ calcolare il terzo e il sesto termine

$$\binom{7}{2}(2a)^5(-b^2)^2 = 672\,a^5b^4 \qquad \binom{7}{5}(2a)^2(-b^2)^5 = -84a^2b^{10}$$

Risolvere la disequazione $\binom{x}{3} > \binom{x}{5}$

Anche in questo caso dobbiamo stabilire le condizioni di esistenza: il valore di x deve essere un numero naturale maggiore o uguale a 5. Sviluppando i coefficienti binomiali si ricava la disequazione

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{6} > \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{120}$$

Per le condizioni di esistenza i fattori comuni sono positivi e possono essere semplificati; eseguendo i calcoli si arriva a $-1 < x < 8$
Pertanto le soluzioni della disequazione data sono i numeri 5, 6 e 7

ESEMPI

Ridurre l'espressione $\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}$ ad un solo coefficiente binomiale

Considerando che $\binom{2}{2}=\binom{3}{3}$ e applicando ripetutamente la proprietà di Stifel si ottiene

$$\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}=$$

$$=\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=$$

$$=\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=$$

$$=\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=$$

$$=\binom{6}{2}+\binom{6}{3}=$$

$$=\binom{7}{3}$$