

Esponenziali e logaritmi

Teoria in sintesi

ESPONENZIALI

Potenze con esponente reale

La potenza a^x è definita:

- se $a > 0$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- se $a = 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{R}^+$;
- se $a < 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{Z}$.

Sono definite:

$$(-\sqrt{3})^2 = (-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3});$$

$$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2};$$

$$3^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{3^{\sqrt{2}}}.$$

Non sono definite:

$$(-2^{\sqrt{3}}); \quad 0^0; \quad 0^{-3}.$$

Casi particolari :

- $a = 1$, $1^x = 1$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $x = 0$, $a^0 = 1$, per ogni $a \in \mathbf{R}^+$;

Le proprietà delle potenze definite per esponenti interi valgono anche per esponenti reali:

Se $a > 0$, per ogni x, y appartenenti a \mathbf{R} vale :

$$1. \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y};$$

$$2. \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$3. \quad a^x : a^y = a^{x-y};$$

$$4. \quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x;$$

$$5. \quad a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$$

Funzione esponenziale

Si chiama *funzione esponenziale* ogni funzione del tipo :

$$y = a^x, \text{ con } a > 0 \text{ fissato, } x \in \mathbf{R}.$$

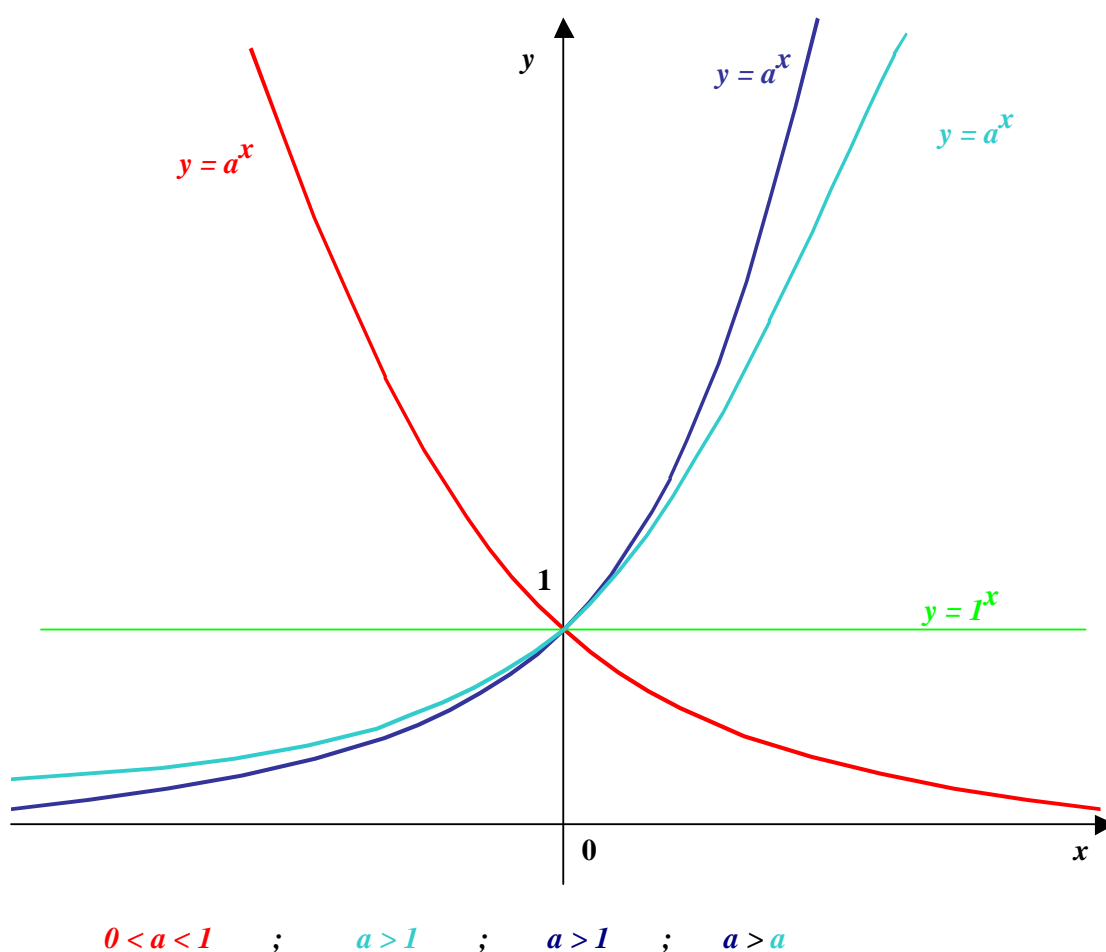
Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è tutto \mathbf{R} ;

il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è \mathbf{R}^+ (la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva).

Si distinguono tre casi:

- $a > 1$: funzione crescente : $x > y \Rightarrow a^x > a^y$;
- $a = 1$: funzione costante : $a^x = 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $0 < a < 1$: funzione decrescente : $x > y \Rightarrow a^x < a^y$.

I seguenti grafici illustrano il comportamento della funzione esponenziale nei vari casi :



EQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMI

Un'equazione si dice *esponenziale* quando l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze.

L'equazione esponenziale più semplice (elementare) è del tipo :

$$a^x = b, \text{ con } a > 0 \text{ e } b > 0; x \text{ è l'incognita dell'equazione.}$$

Un'equazione esponenziale del tipo $a^x = b$ può essere *impossibile*, *indeterminata* o *determinata* :

- *impossibile* se $b \leq 0$, oppure $b \neq 1$ e $a = 1$; esempio : $2^x = -3$ oppure $1^x = 5$;
- *indeterminata* se $a = 1, b = 1$; esempio : $1^x = 1$;
- *determinata* se $a > 0, a \neq 1, b > 0$; esempio : $3^x = 5$.

Si chiama **logaritmo in base a di b** l'unica soluzione dell'equazione esponenziale elementare nel caso determinato, cioè l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b .

$$\begin{array}{c} a^x = b \\ \Updownarrow \\ x = \log_a b \end{array} \quad \begin{array}{l} a = \text{base dell'esponenziale} \\ \text{e del logaritmo} \end{array}$$

Supponiamo di dover risolvere un'equazione esponenziale $a^x = b$:

- se a e b si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, si eguagliano gli esponenti :
 $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$;
- se a e b non si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, le soluzioni si scrivono sotto forma di logaritmi : $2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$.

Il logaritmo risulta essere l'operazione inversa dell'esponenziale, pertanto le limitazioni cui è soggetto l'esponenziale si riflettono sul logaritmo: fissata la base $a > 0$, deve essere $b > 0$, inoltre valgono i casi particolari: $\log_a 1 = 0$, poichè $a^0 = 1$; $\log_a a = 1$, poichè $a^1 = a$.

Analogamente, alle proprietà degli esponenziali precedentemente elencate corrispondono le seguenti proprietà dei logaritmi:

- 1) $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$ ($x \in \mathbf{R}^+$; $y \in \mathbf{R}, a > 0$);
- 2) $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$ ($x \in \mathbf{R}^+$; $y \in \mathbf{R}^+, a > 0$);
- 3) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ($x \in \mathbf{R}^+$; $y \in \mathbf{R}^+, a > 0$);
- 4) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ($a, b, c > 0$); formula di cambiamento di base nei logaritmi .

I logaritmi che compaiono sulle calcolatrici sono in base $a = 10$ oppure in base $a = e \approx 2,718$:
 $\log x$ indica il $\log_{10} x$, detto anche *logaritmo decimale*; $\ln x$, indica il $\log_e x$, detto anche

logaritmo naturale o neperiano.

Funzione logaritmica

Si chiama *funzione logaritmica* ogni funzione del tipo :

$$y = \log_a x \quad , \quad \text{con } a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ fissato, } x \in \mathbf{R}^+.$$

La funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale, pertanto *dominio* e *codominio* risultano scambiati rispetto a quelli della funzione esponenziale.

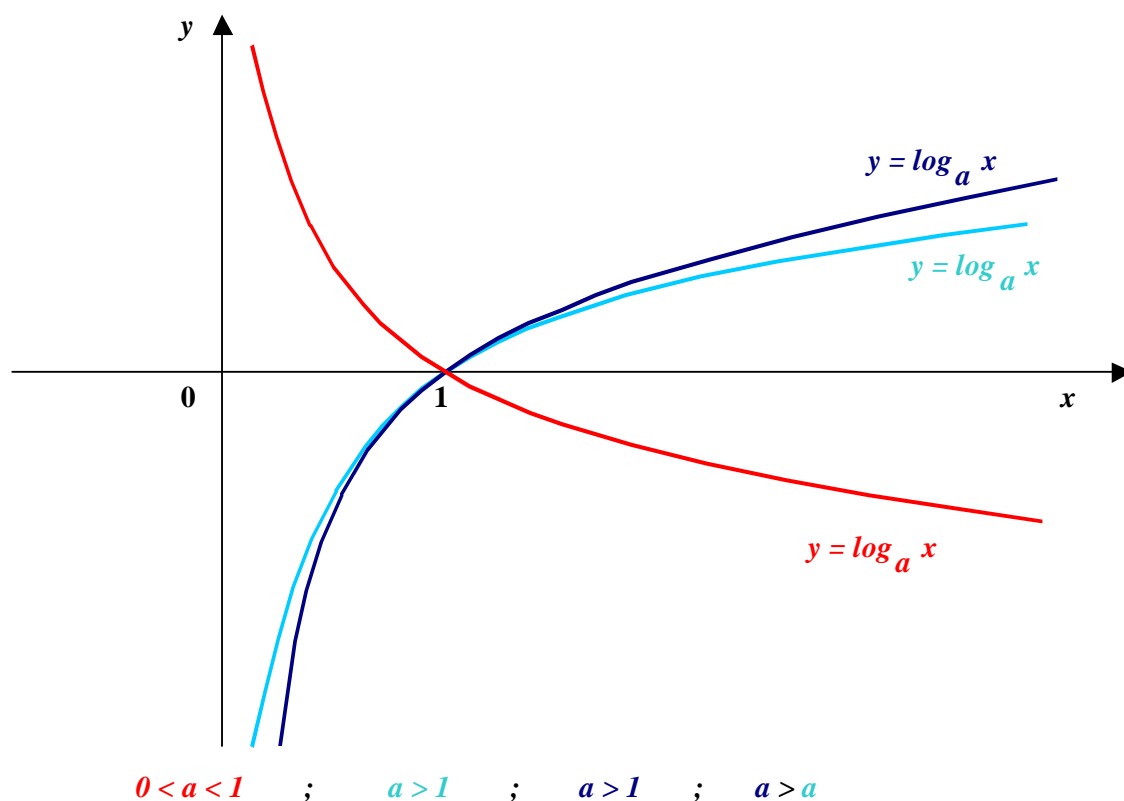
Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è \mathbf{R}^+ ;

il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è \mathbf{R} .

Si distinguono due casi:

- $a > 1$: funzione crescente : $x > y \Rightarrow \log_a x > \log_a y$;
- $0 < a < 1$: funzione decrescente : $x > y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$;

I grafici della funzione logaritmica si ottengono da quelli della funzione esponenziale per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ($y = x$) ; essi illustrano il comportamento della funzione esponenziale nei vari casi :



EQUAZIONI LOGARITMICHE

Un'equazione si dice *logaritmica* quando l'incognita compare soltanto nell'argomento di uno o più logaritmi.

L'equazione logaritmica più semplice (elementare) è del tipo :

$$\log_a x = b, \text{ con } a > 0 \text{ e } b \in \mathbf{R}; x > 0 \text{ è l'incognita dell'equazione.}$$

La sua soluzione, per quanto detto a proposito dell'equazione esponenziale, è : $x = a^b$.

Per risolvere un'equazione logaritmica conviene:

1. (quando è possibile) trasformare l'equazione data in una equivalente del tipo $\log_a A(x) = \log_a B(x)$, applicando le proprietà dei logaritmi ;
2. determinare le soluzioni dell'equazione $A(x) = B(x)$;
3. eseguire il controllo mediante verifica diretta dei valori di x calcolati al punto 2 ;
4. in alternativa al punto 3, associare all'equazione di cui al punto 2 tutte le condizioni di esistenza sui logaritmi (ricordiamo che un logaritmo è definito soltanto per valori positivi del suo argomento), per selezionare le soluzioni accettabili.

Esempi

1. Risolviamo l'equazione:

$$8 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 16.$$

Osserviamo che:

$$2^{x+1} = 2^x \cdot 2 \text{ e } 2^{x-1} = \frac{2^x}{2}.$$

Quindi è possibile trasformare l'equazione assegnata nell'equazione:

$$8 \cdot \frac{2^x}{2} - 2 \cdot 2^x = 16 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^3$$

La soluzione dell'equazione data è quindi $x = 3$.

2. Risolviamo l'equazione:

$$5 \cdot 3^x = 7.$$

Possiamo trasformare l'equazione eseguendo il logaritmo (in una base qualsiasi, per esempio in base 10) del primo e del secondo membro:

$$\log(5 \cdot 3^x) = \log 7.$$

Applichiamo la proprietà 2) dei logaritmi:

$$\log 5 + \log 3^x = \log 7.$$

Applichiamo la proprietà 1) dei logaritmi:

$$\log 5 + x \cdot \log 3 = \log 7.$$

Isolando x otteniamo:

$$x = \frac{\log 7 - \log 5}{\log 3} \quad (*).$$

In alternativa potevamo isolare 3^x , ottenendo:

$$3^x = \frac{7}{5}.$$

Prendendo il logaritmo in base 3 di entrambi i membri si ha:

$$x = \log_3 \frac{7}{5} = \log_3 7 - \log_3 5$$

Utilizzando la formula di cambiamento di base 4) si riottiene (*).

3. Risolviamo l'equazione:

$$2^x + 2^{3-x} = 6.$$

Osserviamo che:

$$2^{3-x} = \frac{2^3}{2^x}.$$

L'equazione assegnata è equivalente a:

$$2^x + \frac{8}{2^x} = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{2^x \cdot 2^x + 8}{2^x} = \frac{6 \cdot 2^x}{2^x}$$

Il denominatore, essendo una funzione esponenziale, non può assumere il valore zero. Possiamo moltiplicare per 2^x entrambi i membri, ottenendo:

$$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

E' evidente la struttura di equazione algebrica di II grado nell'incognita 2^x .

Risolvendo tale equazione (può essere utile introdurre una variabile ausiliaria $z = 2^x$ per rendere più evidente la natura di equazione di secondo grado) si ha:

$$2^x = 2 \quad \text{oppure} \quad 2^x = 4$$

da cui:

$$x = 1 \quad \text{oppure} \quad x = 2.$$

4. Risolviamo l'equazione logaritmica:

$$\log_3(x+1) - \log_3(x-2) = \log_3 x - 2.$$

Imponiamo le condizioni di esistenza sui logaritmi dell'equazione data, ricordando che gli argomenti devono essere positivi:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

cioè alla variabile x si possono assegnare solo i valori maggiori di 2.

Risolviamo l'equazione applicando la proprietà 3) dei logaritmi e osservando che $2 = \log_3 3^2$:

$$\log_3 \left(\frac{x+1}{x-2} \right) = \log_3 \left(\frac{x}{3^2} \right)$$

Uguagliando gli argomenti si ha la seguente equazione equivalente:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x}{9} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 11x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{157}}{2}.$$

Il valore $x = \frac{11 - \sqrt{157}}{2}$ è minore di 2, quindi non è compatibile con le condizioni

di esistenza. L'unica soluzione dell'equazione è data da:

$$x = \frac{11 + \sqrt{157}}{2}.$$

Esercizi

1. Tenendo presente che $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, scrivi le seguenti potenze sotto forma di radice:

a) $3^{\frac{5}{8}}$; $4^{\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$;
 b) $2^{-\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{11}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

2. Scrivi le seguenti radici sotto forma di potenza con esponente razionale:

a) $\sqrt[6]{2^5}$; $\sqrt[4]{243}$; $\sqrt[4]{0.25}$;
 b) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; $\sqrt[19]{\frac{1}{256}}$; $\sqrt[7]{\frac{1}{125}}$.

3. Risolvi le seguenti equazioni esponenziali:

a) $2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{9}{2}\right]$
 b) $8^x \cdot \sqrt{2} = 4^x$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$
 c) $a^x \cdot a^{2x-1} = \frac{a^2}{\sqrt{a}}$ $\left[\frac{5}{6}\right]$
 d) $2^x + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 7$ $\left[\log_2 \frac{14}{5}\right]$
 e) $4^x = 2^x - 2$ $[\emptyset]$
 f) $3 \cdot 5^x = 7$ $\left[\log_5 \frac{7}{3} = \frac{\log 7 - \log 3}{\log 5}\right]$
 g) $3^x + 3^{1-x} = 4$ $[0; 1]$
 h) $3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = 3^{x-1}$ $[-1; 2]$
 i) $6 \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ $\left[-1; -\frac{\log 3}{\log 2}\right]$
 j) $2^{2x+3} - 25 \cdot 2^x + 3 = 0$ $[-3; \log_2 3]$

4. Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

a) $\log_2(x-1) = 3$ $[9]$
 b) $\log(x-2) + \log 5 = \log x$ $\left[\frac{5}{2}\right]$
 c) $\log(x-2) - \log(x-1) = \log 5$ $[\emptyset]$
 d) $2 \cdot \log_2 x = 2 + \log_2(x+3)$ $[6]$
 e) $\log(x-1) - 2 \cdot \log(x+1) - \log 8 = -2$ $\left[\frac{3}{2}; 9\right]$
 f) $\log_3(x-1) = \frac{1}{2} \log_3 x$ $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$