IL CALCOLO COMBINATORIO

Giochiamo a dadi…

Nel XVII secolo il cavaliere De Meré, forte giocatore, … come spesso accadeva fra la nobiltà di quel tempo, si pose questo quesito: ”Che cosa è più conveniente, scommettere di ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado, oppure un doppio 6 lanciando 24 volte due dadi?”

Pensava che le due possibilità dovessero essere indifferenti ragionando (erroneamente!!!) in questo modo:

***6** (possibilità in 1 dado) : **4** (lanci) = **36** (possibilità in 2 dadi) : **24** (lanci) … poi giocava, e perdeva più spesso quando scommetteva sul secondo caso!!*

*Il cavaliere De Meré rivolse il quesito ad un suo amico, Blaise Pascal, genio matematico dell’epoca... che a sua volta scrisse ad un amico, altro genio matematico dell’epoca, Pierre De Fermat. e insieme diedero vita alla moderna **Teoria delle Probabilità** … Ecco perché perdeva … !!!*

*Ottenere un sei lanciando 4 volte un dado è **più probabile** di un doppio sei lanciando 24 volte due dadi!!!*

Gli Arabi adottarono il passatempo del legionario "di tirare le ossa" (tirare i dadi) quando si espansero nelle province romane. Si riferivano ai piccoli dadi con la parola "azzahr". Ad un certo momento durante il commercio con gli Europei nel Medio Evo, questo gioco fu adottato dai Francesi al quale si riferivano usando le parole "hasar" o "hasard". Durante le interminabili guerre tra Francia e Inghilterra durante i secoli 13 e 14, i cavalieri Inglesi importarono il gioco che chiamarono "hazard" - che significa scommettere su una probabilità o mettere a rischio (come "nel tentare di indovinare").

PROBLEMA 1

Una Ditta produttrice di liquori ed aperitivi, vuole, in occasione del lancio di un nuovo cocktail, codificare i suoi prodotti in modo originale utilizzando, senza ripeterli, i cinque simboli

Calice, Bicchiere, Coppa, Bottiglia, Bicchierino

il nome del nuovo cocktail deve essere un anagramma del nome della Ditta

SITOC

e, come ingredienti base, deve contenere tre dei cinque liquori maggiormente venduti dalla Ditta stessa e precisamente

Brandy, Sherry, Vodka, Whisky e Gin

1) quanti prodotti possono essere codificati utilizzando tre dei cinque simboli?

2) in quanti modi diversi può essere chiamato il nuovo cocktail?

3) quanti cocktail diversi possono essere preparati?

PRINCIPIO FONDAMENTALE DEL CALCOLO COMBINATORIO

Se una scelta può essere fatta in r modi diversi, per ciascuno dei quali una seconda scelta può essere effettuata in s modi diversi, e, per ciascuno dei modi in cui si sono compiute le prime due scelte, una terza scelta può essere effettuata in t modi diversi ecc., allora la successione di tutte le scelte può essere compiuta in $r \cdot s \cdot t$ ... modi diversi

DISPOSIZIONI SEMPLICI

Consideriamo un insieme formato da n elementi distinti ed un numero k minore o uguale a n. Si chiamano ***disposizioni semplici*** *degli n elementi presi a k a k (o disposizioni di classe k) i gruppi ordinati formati da k degli n elementi dell'insieme dato in modo che valgano le seguenti proprietà:*

1. in ciascun raggruppamento figurano k oggetti senza ripetizione;

2. due di tali disposizioni si ritengono diverse quando differiscono per almeno un elemento oppure per l'ordine con cui gli stessi elementi si presentano.

PERMUTAZIONI SEMPLICI

*Le permutazioni semplici altro non sono che le disposizioni di n oggetti presi ad n ad n ossia, dato un insieme di n elementi distinti, si dicono **permutazioni** di tali n elementi tutti i gruppi che si possono formare con gli n elementi dati prendendoli tutti.*

Se ne deduce allora che le permutazioni semplici differiscono soltanto per l'ordine con cui sono disposti gli n elementi distinti contenuti nei vari raggruppamenti.

COMBINAZIONI SEMPLICI

*Dato un insieme di n elementi ed un numero k minore o uguale a n, si dicono **combinazioni semplici** degli n elementi presi a k a k (o di classe k) tutti i gruppi di k elementi, scelti fra gli n dell'insieme dato, in modo che ciascun gruppo differisca dai restanti almeno per uno degli elementi in esso contenuti (senza considerare, quindi, l'ordine degli elementi).*

Da notare la differenza fra disposizioni e combinazioni (semplici): mentre nelle disposizioni si tiene conto dell'ordine, nelle combinazioni semplici, invece, due raggruppamenti si considerano distinti solo quando differiscono almeno per un elemento.

COME SI CALCOLANO LE DISPOSIZIONI, LE PERMUTAZIONI E LE COMBINAZIONI SEMPLICI?

Il numero delle disposizioni semplici di n elementi distinti, di classe k, è uguale al prodotto di k numeri interi consecutivi decrescenti dei quali il primo è n:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Le permutazioni coincidono con le disposizioni semplici di classe n, quindi il calcolo delle permutazioni è uguale al calcolo del numero delle disposizioni semplici di n elementi di classe n:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

cioè: il numero delle permutazioni di n elementi distinti è uguale al prodotto dei primi n numeri naturali (escluso lo zero).

Per determinare il numero delle combinazioni semplici di n elementi, di classe k, ci serviamo della formula:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1}$$

Da questa formula si ricava che il numero delle combinazioni di n oggetti di classe k è dato dal quoziente di k fattori interi, consecutivi, decrescenti a partire da n ed il prodotto di k fattori interi, consecutivi, decrescenti, a partire da k.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

1) quanti prodotti possono essere codificati utilizzando tre dei cinque simboli?

$$D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

2) in quanti modi diversi può essere chiamato il nuovo cocktail?

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

3) quanti cocktail diversi possono essere preparati?

$$C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

IL FATTORIALE

Il simbolo $n!$ si legge *n fattoriale* e non è altro che il prodotto di n numeri interi decrescenti a partire da n e per definizione si pone $0! = 1$.
Utilizzando il fattoriale si ha

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad P_n = n! \qquad C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

ESEMPI

Quanti ambi si possono formare con i 90 numeri del Lotto? Quanti terni? Quante quaterne?

$$C_{90,2}=\frac{90\cdot 89}{2\cdot 1}=4005 \qquad C_{90,3}=\frac{90\cdot 89\cdot 88}{3\cdot 2\cdot 1}=117480 \qquad C_{90,4}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=2555190$$

Calcolare quanti anagrammi, anche senza significato, si possono formare con le parole PANE, ANTICO, SQUADRONE

$$P_4=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24 \qquad P_6=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720 \qquad P_9=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=362880$$

Calcolare quanti numeri di 4 cifre, tutte diverse, si possono formare con le cifre 1, 2, 3, 4, 5 e 6

$$D_{6,4}=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=360$$

ESEMPI

Calcolare in quanti modi si possono estrarre contemporaneamente 4 carte da un mazzo di 52 carte. In quanti modi si possono estrarre 4 carte di quadri? In quanti modi si possono estrarre 4 carte dello stesso seme?

$$C_{52,4} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 270725 \qquad C_{13,4} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 715 \qquad 4 \cdot C_{13,4} = 4 \cdot \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2860$$

In quanti modi diversi 4 persone possono occupare 4 posti fra 7 a disposizione? E se le persone fossero 7?

$$D_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840 \qquad D_{7,7} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

Da un'urna contenente 15 palline rosse e 10 bianche si estraggono contemporaneamente due palline. In quanti modi può essere effettuata la scelta? In quanti modi può essere effettuata la scelta di due palline rosse? In quanti modi può essere effettuata la scelta di una pallina rossa ed una pallina bianca?

$$C_{25,2} = \frac{25 \cdot 24}{2 \cdot 1} = 300 \qquad C_{15,2} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 105 \qquad C_{15,1} \cdot C_{10,1} = 15 \cdot 10 = 150$$

ESEMPI

Quante parole di quattro lettere tutte diverse (anche senza significato) si possono formare con le 21 lettere dell'alfabeto italiano? Quante di queste parole iniziano con una consonante? Quante iniziano con la sillaba FI? Quante terminano con una vocale?

$$D_{21,4} = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 143640$$

$$D_{16,1} \cdot D_{20,3} = 16 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 109440$$

$$D_{1,1} \cdot D_{1,1} \cdot D_{19,2} = 1 \cdot 1 \cdot 19 \cdot 18 = 342$$

$$D_{20,3} \cdot D_{5,1} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 5 = 34200$$

Nel gioco del Lotto su una ruota ogni settimana si estraggono 5 numeri. Calcolare, fra tutte le cinquine, quante sono quelle che contengono un ambo prefissato. Quante contengono un terno prefissato? Quante contengono una quaterna prefissata?

$$C_{2,2} \cdot C_{88,3} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 109736$$

$$C_{3,3} \cdot C_{87,2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{87 \cdot 86}{2 \cdot 1} = 3741$$

$$C_{4,4} \cdot C_{86,1} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 86 = 86$$

PROBLEMA 2

1) Elencare tutte le diverse “parole” di tre caratteri che si possono comporre utilizzando i due segni telegrafici punto e linea
2) Trovare quanti sono gli anagrammi della parola TORTO
3) Facendo riferimento alla terza domanda del problema 1, si sa che un cocktail può essere preparato anche con due dosi di un liquore e una di un altro; determinare quanti cocktail si possono preparare.

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Consideriamo un insieme costituito n elementi distinti ed un numero naturale k, senza alcuna limitazione superiore. Il problema che ci poniamo è quello di costruire tutti i possibili raggruppamenti distinti prendendo k elementi in modo che:
1. in ciascun raggruppamento figurano k oggetti ed uno stesso oggetto può figurare, ripetuto, fino ad un massimo di k volte;
2. due qualsiasi raggruppamenti sono distinti se uno di essi contiene almeno un oggetto che non figura nell’altro, oppure gli oggetti sono diversamente ordinati, oppure gli oggetti che figurano in uno figurano anche nell’altro ma sono ripetuti un numero diverso di volte.

PERMUTAZIONI CON ELEMENTI RIPETUTI

Le permutazioni con elementi ripetuti si definiscono in modo analogo a quelle semplici con la differenza che in questo caso gli n elementi da permutare non sono tutti distinti ma n_1 *sono uguali fra loro,* n_2 *sono uguali fra loro ecc.*

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Consideriamo un insieme formato da n elementi e fissiamo un numero k (senza alcuna limitazione superiore); ci proponiamo di costruire i possibili raggruppamenti distinti prendendo k elementi dell'insieme dato in modo che:
1. in ciascun raggruppamento figurino k elementi dell'insieme dato, potendovi uno stesso elemento figurare più volte fino ad un massimo di k volte;
2. due raggruppamenti sono distinti se uno di essi contiene almeno un elemento che non figura nell'altro, oppure gli elementi che figurano in uno figurano anche nell'altro ma sono ripetuti un numero diverso di volte.

COME SI CALCOLANO LE DISPOSIZIONI, LE PERMUTAZIONI E LE COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE?

Il numero delle disposizioni con ripetizione è dato da:

$$D'_{n,k} = n^k$$

Il numero delle permutazioni distinte con elementi ripetuti che si possono ottenere è dato da:

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots}$$

La formula che dà il numero delle combinazioni con ripetizione di n elemento di classe k è:

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k}$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

1) il numero delle "parole" richieste è:

$$D'_{2,3} = 2^3 = 8$$

2) gli anagrammi della parola TORTO sono:

$$P_5^{(2,2)} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}$$

3) i cocktail che si possono preparare nel caso descritto sono:

$$C'_{5,3} - 3 = C_{7,3} - 3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} - 3 = 32$$

ESEMPI

Quanti numeri di 4 cifre si possono formare con le cifre 5, 6, 7, 8 e 9? E con le cifre 0, 1, 2, 3 e 4?

$$D'_{5,4} = 5^4 = 625$$

$$D'_{4,1} \cdot D'_{5,3} = 4 \cdot 5^3 = 500$$

Calcolare quanti anagrammi, anche senza significato, si possono formare con le parole VITI, CASSA, NINNOLO, MATEMATICA

$$P_4^{(2)} = \frac{4!}{2!} = 12$$

$$P_5^{(2,2)} = \frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$$

$$P_7^{(3,2)} = \frac{7!}{3!\cdot 2!} = 420$$

$$P_{10}^{(3,2,2)} = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151200$$

Si lancia sette volte una moneta. Quante sono le possibili successioni di testa e croce che si possono avere? Quante di esse contengono 5 teste e 2 croci?

$$D'_{2,7} = 2^7 = 128$$

$$P_7^{(5,2)} \cdot D'_{1,5} \cdot D'_{1,2} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} \cdot 1^5 \cdot 1^2 = 21$$

ESEMPI

In sei contenitori si devono sistemare quattro oggetti. Determinare in quanti modi si possono sistemare gli oggetti se:

a. gli oggetti sono distinguibili fra loro ed in ogni contenitore deve essere posto al massimo un oggetto
b. gli oggetti sono distinguibili fra loro ed in ogni contenitore si possono mettere anche più oggetti
c. gli oggetti sono indistinguibili fra loro ed in ogni contenitore deve essere posto al massimo un oggetto
d. gli oggetti sono indistinguibili fra loro ed in ogni contenitore si possono mettere anche più oggetti

Si tratta di determinare le disposizioni e le combinazioni di 6 elementi (i contenitori) di classe 4 (gli oggetti).

$$D_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \qquad D'_{6,4} = 6^4 = 1296$$

$$C_{6,4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15 \qquad C'_{6,4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$