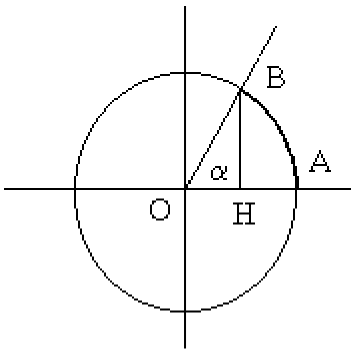
Trigonometria

Teoria in sintesi

Radiante: angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza rettificata uguale al raggio
Si passa dai gradi ai radianti con la seguente proporzione: $\alpha° : 180° = \alpha^{rad} : \pi$

Considerato un sistema di riferimento cartesiano si definisce **circonferenza goniometrica** la circonferenza avente centro nell'origine e raggio unitario (circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$).
Il punto A(1,0) è detto origine degli archi, il verso di percorrenza positivo è quello antiorario.
Notiamo anche che la misura in radianti dell'angolo al centro coincide con la misura dell'arco della circonferenza goniometrica sotteso, quindi in trigonometria si parla indifferentemente di archi o di angoli.

Detto α l'angolo al centro $A\hat{O}B$ definiamo ora le seguenti funzioni trigonometriche:



sen ~ = ordinata del punto B secondo estremo dell'arco α (il primo estremo è in A) = $\overline{BH}$.

cos ~ = ascissa del punto B secondo estremo dell'arco α = $\overline{OH}$.

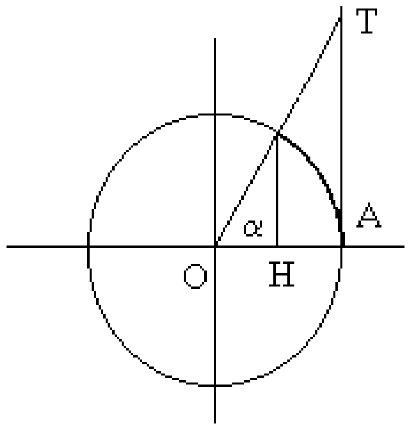
tg~ (o **tan~**) = rapporto, quando esiste, tra il seno e il coseno dell'angolo α (cioè quando $\cos\alpha \neq 0$)

cotg~=(o **cotan~**) Z=rapporto, quando esiste, tra il coseno e il seno dell'angolo α (cioè quando $\text{sen}\alpha \neq 0$).

N.B. Dalle definizioni date segue che seno coseno tangente e cotangente sono funzioni di α, cioè sono numeri reali che dipendono solamente dal valore dell'angolo α.

RELAZIONI FONDAMENTALI FRA LE DIVERSE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE DI UNO STESSO ANGOLO ORIENTATO:

Tra le funzioni trigonometriche viste intercorrono le seguenti relazioni:



$sen^2\sim + \cos^2\sim \; = 1$

(*teorema di Pitagora*)

$$tg\sim = \frac{sen\sim}{\cos\sim}$$

$$cotg\sim = \frac{1}{tg\sim} = \frac{\cos\sim}{sen\sim}$$

Si può inoltre dimostrare che **tg** ~ è l' ordinata del punto T di intersezione tra la tangente geometrica alla circonferenza nel punto A e la semiretta OT (che teorema sui triangoli si usa?).

Nota la funzione trigonometrica di un angolo è possibile ricavare le altre, e, dalle relazioni precedenti si ottiene l'espressione di tutte le funzioni di un dato angolo orientato mediante una sola di esse

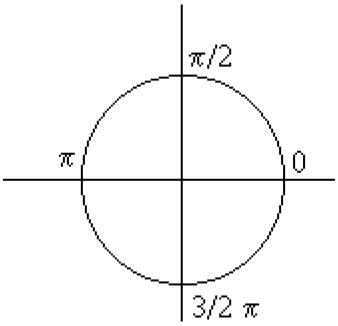
N.B. Il segno va scelto a seconda del quadrante in cui si trova l'angolo α.

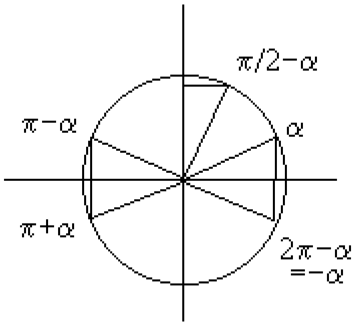
NOTO	**sen~**	**cos~**	**tg~**
sen~	senα	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$	$\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$
cos~	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	cosα	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$
tg~	$\dfrac{\text{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	tgα
cctg~	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\text{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\text{ctg}\alpha}$

VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI PARTICOLARI

~	**sen~**	**cos~**	**tg~**
15° = ®/12	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
18° = ®/10	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}$
30° = ®/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45° = ®/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60° = ®/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90° = ®/2	1	0	non esiste
180° = ®	0	-1	0
270° = 3/2®	-1	0	non esiste
0° = 360° = 2®	0	1	0

Da evidenti simmetrie sulla circonferenza si deducono poi i valori delle funzioni trigonometriche di altri archi particolari.





Esempio
il coseno di 4/3 π è uguale in modulo a quello di π/3 (infatti 4/3 π = π + π/3), essendo nel terzo quadrante però il suo segno è negativo, quindi cos 4/3 π = −1/2.

Esercizi

1. Dopo aver disegnato gli archi corrispondenti a cos α = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, trovare dell'arco nel quarto quadrante le altre funzioni trigonometriche.

2. Sapendo che α è acuto e positivo e che sen α = 3/5 calcolarne le altre funzioni trigonometriche.

3. Ragionando solo sulla circonferenza goniometrica completare con i segni > = < le seguenti:
   $sen\frac{®}{6}$..........$sen\frac{®}{6} + sen\frac{®}{4}$
   $\cos\frac{®}{6}$..........$\cos\frac{®}{6} + \cos\frac{®}{4}$
   $sen\frac{®}{6} - sen\frac{®}{3}$..........0
   $\cos\frac{®}{6} - \cos\frac{®}{3}$..........0

4. Ragionando solo sulla circonferenza goniometrica provare che:
   sen(π – α) = sen α
   sen (π/2 – α) = cos α
   sen (π + α) = - sen α
   sen (2π – α) = - sen α

5. Semplificare le seguenti espressioni:
   $tg(\pi + \alpha)sen(\pi-\alpha)\cos(\pi + \alpha) + tg^2(\pi-\alpha)\cos^2(-\alpha)=$ [0]
   $sen^4\alpha - sen^2\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$ [0]

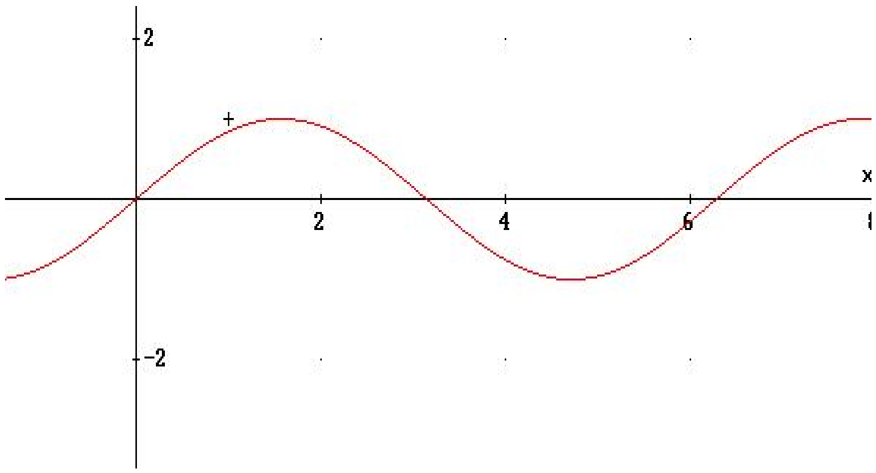
Esistono utili formule per il calcolo delle funzioni trigonometriche, che sono riportate in fondo.

VARIAZIONE DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE:

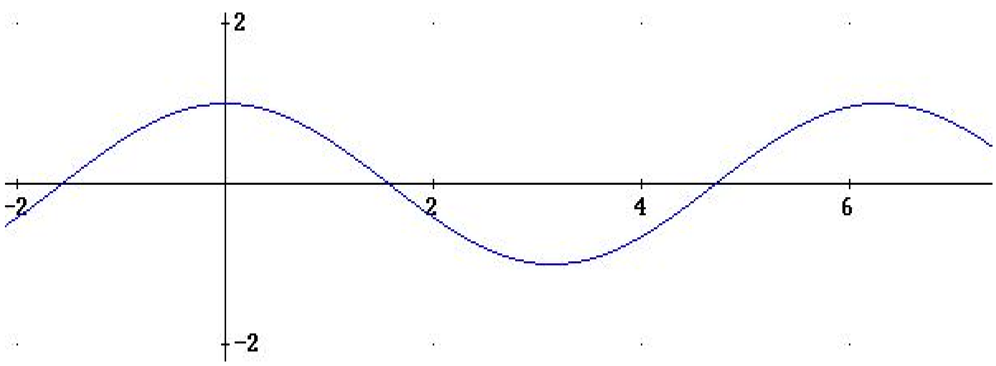
Ricordando la definizione data osserviamo che:
$-1 \le \text{sen}\ \alpha \le 1$; $-1 \le \cos \alpha \le 1$
I grafici delle funzioni trigonometriche sono i seguenti:

y = sen x

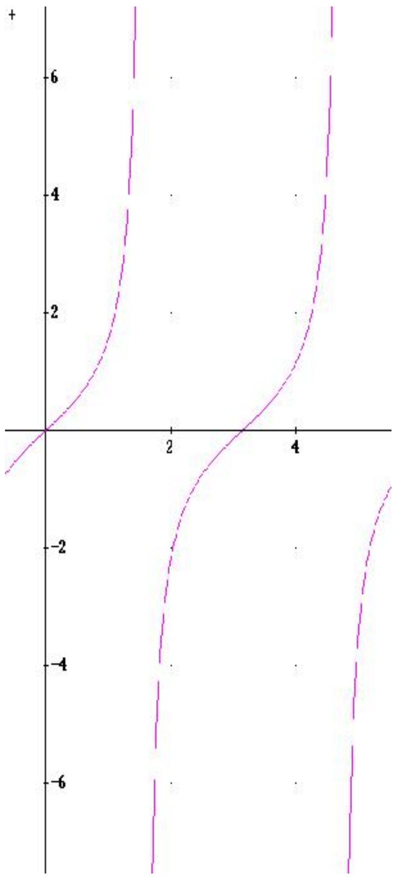
definita per ogni x, il codominio è [-1,1], periodica di periodo 2π, interseca l'asse *x* nei punti della forma $k\text{®}$, con $k \in \mathbf{Z}$.



y = cos x
definita per ogni x, il codominio è [-1,1], periodica di periodo 2π , interseca l'asse *x* nei punti della forma $\frac{\text{®}}{2} + k\text{®}$, con $k \in \mathbf{Z}$.



y = tg x
definita per x $\neq \pi/2 + k\pi$, il codominio è **R**, periodica di periodo π, interseca l'asse *x* nei punti della forma *k*® , con $k \in \mathbf{Z}$.



Esercizi

Prova a disegnare i grafici di:

1. $\sin 2x$
2. $3\cos x$

RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI

- *PRIMO GRADO, elementari*

> 1. *sinx = h*
> 2. *cosx = h*
>
> con *h*Č [-1, 1]

Ricordando la definizione delle funzioni *sinx* e *cosx* queste equazioni si risolvono intersecando la circonferenza (di equazione $x^2 + y^2 = 1$) con l'equazione

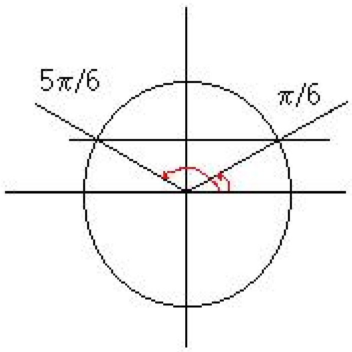
> 1. $y = h$
> 2. $x = h$

(che rappresenta una retta)

Esempio:
sen x = ½

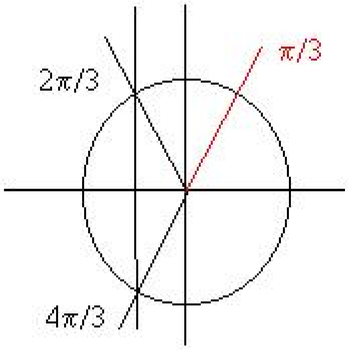
Può essere interpretata come : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 1/2 \end{cases}$

disegnando la circonferenza goniometrica e la retta y = 1/2 si ha:



I punti di intersezione sono posizionati nel primo quadrante: x = π/6,
e nel secondo, x = π – π/6 = 5π/6
In questo modo abbiamo trovato le due soluzioni, ma ricordando che la funzione seno è periodica di periodo 2π se voglio ottenere tutte le soluzioni dell'equazione ho:
x = π/6 + 2kπ,
x = 5π/6 + 2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$

cos x = -1/2
disegnando la circonferenza goniometrica e la retta x = -1/2 si ha:



In questo caso i punti di intersezione sono posti nel secondo e terzo quadrante.
L'arco con cos x = + ½ è x = π/3,
quindi quello posto nel secondo quadrante sarà
x = π – π/3 = 2/3 π
mentre quello nel terzo quadrante sarà.
x = π + π/3 = 4/3 π
Le soluzioni sono quindi, tenendo conte del periodo:
x = 2/3 π +2kπ,
x = 4/3 π +2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$.

- *PRIMO GRADO, lineari*

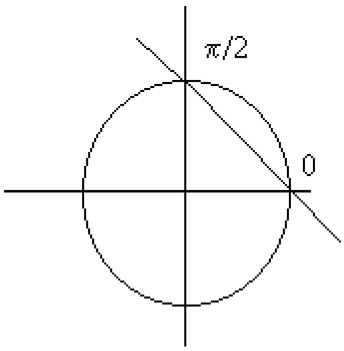
3. asenx + bcosx = h

Si risolvono intersecando la circonferenza (di equazione $x^2 + y^2 = 1$) con l'equazione
ay + bx =h(che rappresenta una retta)

Esempio

senx + cos x =1

Si pone *y = senx, x= cosx* e si interseca la retta *y = -x + 1* così ottenuta con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$



Si ottengono i punti (0,1) e (1,0) che corrispondono alle soluzioni x = 0, x = π/2

considerando poi il periodo si ha:x = 0 + 2kπ, x = π/2 + 2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$.

- *SECONDO GRADO*

1. Se l’equazione data contiene <u>una sola funzione trigonometrica</u> si risolve mediante la **formula generale delle equazioni di secondo grado**, ossia $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
2. Se contiene più di una funzione si cerca, mediante le formule viste precedentemente, di trasformarla in una che contenga una sola funzione trigonometrica.

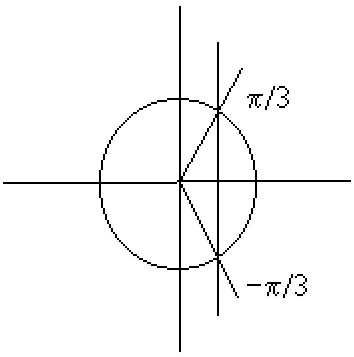
Esempio

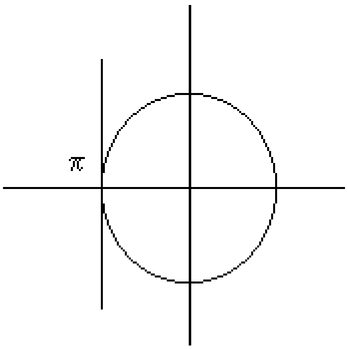
$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

Applicando la formula risolutiva si ha:

$\cos x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = -1; 1/2$

ora risolvo le equazioni cos x = ½, cos x = -1





x = π/3 +2kπ, x = π +2kπ,

x = -π/3 +2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$.

Risolviamo ora:

$\cos^2 x - \text{sen}^2 x + \cos x = 0$

è di secondo grado, ed in essa non compare una sola funzione goniometrica; ricordando che

$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ si ha:

$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x = 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

da cui si ottiene l’equazione precedente .

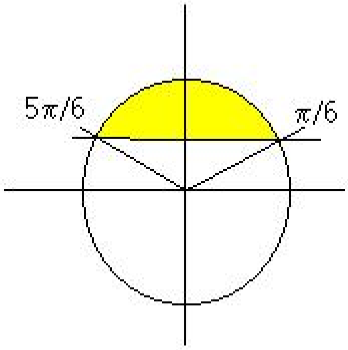
Esercizi

1. Risolvere le seguenti equazioni:

$\text{sen}(2x - \pi/2) = ½$	$[x = \pi/6 + 2k\pi,\ x = 2\pi/6 + 2k\pi]$
$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$	$[x = 2k\pi,\ x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi]$
$\cos x = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$	$[x = \pi + 2k\pi,\ x = \pm\pi/3 + 2k\pi]$
$\text{sen}(\pi/4 + x) + \text{sen}(\pi/4 - x) = 1$	$[x = \pm\pi/4 + 2k\pi]$
$\text{sen}\, x = \text{sen}\, 2x$	$[x = k\pi,\ x = \pm\pi/3 + 2k\pi]$
$2\cos x + 2\,\text{sen}\, x = \sqrt{3} + 1$	$[x = \pi/6 + 2k\pi,\ x = \pi/3 + 2k\pi]$

RISOLUZIONE DI DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE
Disequazioni elementari

Consideriamo ad esempio la disequazione sen x > ½



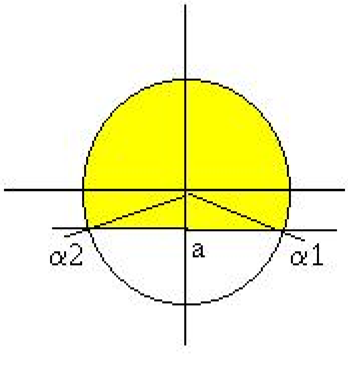
Disegnando la circonferenza e la retta y = ½ cerco tutti gli archi per cui l'ordinata è maggiore di ½, ed ottengo la soluzione

$$\pi/6 + 2k\pi < x < 5\pi/6 + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbf{Z}.$$

quindi ricordando che $-1 \le \text{sen}\,\alpha \le 1$; $\quad -1 \le \cos\alpha \le 1$

Disequazione: $\text{sen}\, x > a$

$a \ge 1$:	impossibile
$a < -1$:	sempre vera
$a = -1$:	vera $\forall x \ne \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$
$-1 < a < 1$:	$\alpha_1 + 2k\pi < x < \alpha_2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$



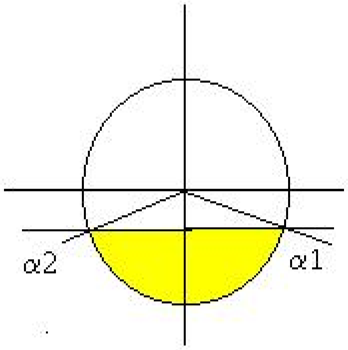
Disequazione $\operatorname{sen} x < a$

$a \leq 1$: impossibile

$a > 1$: sempre vera

$a = 1$: vera $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$-1 < a < 1$: $\alpha 2 + 2k\pi < x < 2\pi - \alpha 2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$



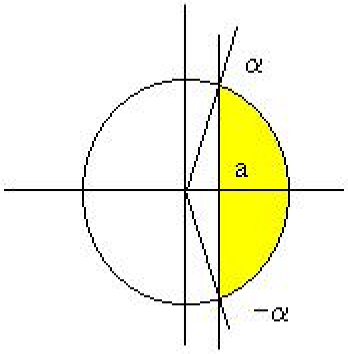
Disequazione $\cos x > a$

$a \geq 1$: impossibile

$a < -1$: sempre vera

$a = -1$: vera $\forall x \neq \pi + 2k\pi$

$-1 < a < 1$: $-\alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$, con $\alpha = \arccos a$, $k \in \mathbf{Z}$



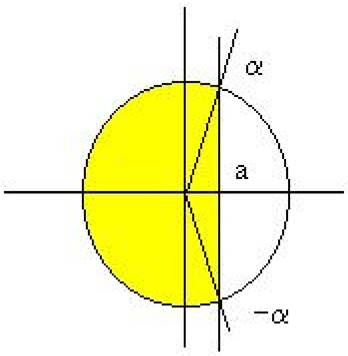
Disequazione $\cos x < a$

$a \geq 1$: sempre vera

$a < -1$: impossibile

$a = -1$: vera $\forall x \neq \pi + 2k\pi$

$-1 < a < 1$: $\alpha + 2k\pi < x < 2\pi - \alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$



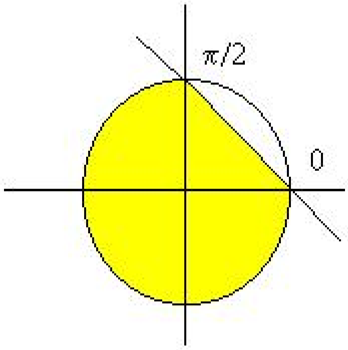
Disequazioni lineari

Nel caso di una disequazione lineare del tipo asenx + bcosx > (<) h si procede come per l'equazione corrispondente, cioè si risolve intersecando la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con la disequazione ay + bx >h (che rappresenta un semipiano)

Esempio

senx + cos x <1

Si pone *y = senx*, *x= cosx* e si interseca il sempipiano *y < -x + 1* così ottenuto con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$



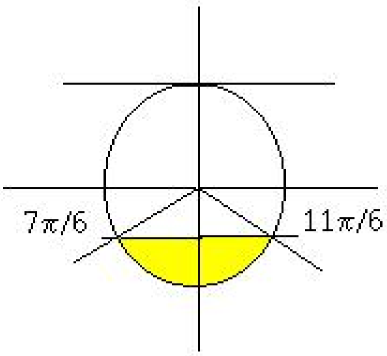
Si ottiene così la soluzione: π/2+ 2kπ < x <2π + 2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$

Disequazioni di 2î grado

Si risolvono come le disequazioni di secondo grado, scegliendo gli intervalli interni o esterni alle soluzioni trovate, si ottengono così delle disequazioni di primo grado che si risolvono come precedentemente visto.

Esempio

$2sen^2x - sen\ x - 1 > 0$
risolvendo l'equazione $2sen^2x - sen\ x - 1 = 0$ ottengo, mediante la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado: sen x = 1 sen x = -1/2, da cui, prendendo i valori esterni si ha:
sen x > 1 sen x < -1/2
cioè:



sen x >1 non dà soluzioni, mentre sen x < ½ ha come soluzioni 7π/6 + 2kπ < x < 11π/6 + 2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$

Esercizi

1. Risolvere le seguenti disequazioni:

$\cos x > \frac{1}{2}$ $[-\pi/3 + 2k\pi < x < \pi/3 + 2k\pi]$

$2 \cos^2 x - \cos x < 0$ $[\pi/3 + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi$
$3\pi/2 + 2k\pi < x < 5\pi/3 + 2k\pi]$

$\text{sen } x + \cos 2x < 1$ $[\pi/6 + 2k\pi < x < 5\pi/6 + 2k\pi$
$\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi]$

$\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen } x > 0$
$[-5\pi/6 + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi;\ \ 3\pi/2 + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi;\ \ 2k\pi < x < 2k\pi]$

$\sqrt{3}\,\text{sen } x + \cos x > 1$ $[2k\pi < x < \pi/3 + 2k\pi]$

$\dfrac{2\cos x - 3}{senx} \geq 0$ $[\ 2k\pi + 2/3\pi < x < \pi + 2k\pi]$

FORMULE DI TRIGONOMETRIA

Formule di addizione e sottrazione:

sen(α + β) = senαcosβ + cosαsenβ
sen(α - β) = senαcosβ - cosαsenβ
cos(α + β) = cosαcosβ - senαsenβ
cos(α - β) = cosαcosβ + senαsenβ

$$tg(\sim + \quad) = \frac{tg\sim + tg}{1 - tg\sim tg}$$

$$tg(\sim - \quad) = \frac{tg\sim - tg}{1 + tg\sim tg}$$

Formule di duplicazione:
(si ottengono dalle precedenti ponendo α=β)

sen 2α = 2senαcosα
cos 2α = $\cos^2$ α - sen^2 α= 1 – 2sen^2 α = 2$\cos^2$ α -1

$$tg2\sim = \frac{2tg\sim}{1 - tg^2\sim}$$

Formule di bisezione:
(si ottengono dalle precedenti dimezzando l'angolo α)

$$\sin\frac{\sim}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\sim}{2}}$$

$$\cos\frac{\sim}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\sim}{2}}$$

$$tg\frac{\sim}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\sim}{1+\cos\sim}} = \frac{1-\cos\sim}{\sin\sim} = \frac{\sin\sim}{1+\cos\sim}$$

Formule parametriche:

(ESPRESSIONI DI senα, cosα IN FUNZIONE RAZIONALE DI t = $\tan\frac{\sim}{2}$)

$$\sin\sim = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos\sim = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$tg\sim = \frac{2t}{1-t^2}$$

Formule di prostaferesi:

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Formule di Werner:

$$\sin\sim\sin\quad = \frac{1}{2}\left[\cos(\sim - \quad) - \cos(\sim + \quad)\right]$$
$$\cos\sim\cos\quad = \frac{1}{2}\left[\cos(\sim + \quad) + \cos(\sim - \quad)\right]$$
$$\sin\sim\cos\quad = \frac{1}{2}\left[\sin(\sim + \quad) + \sin(\sim - \quad)\right]$$

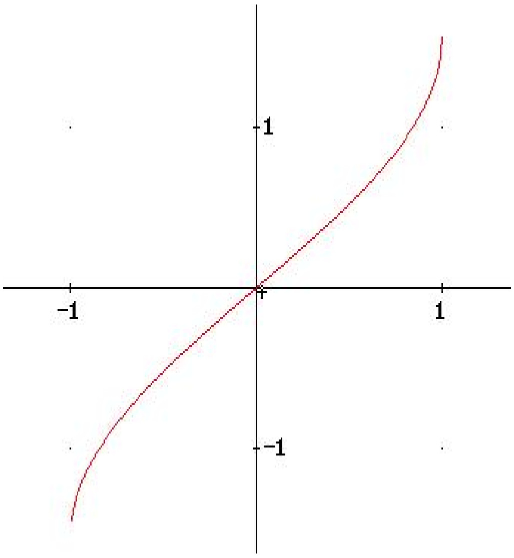
Appendice 1

Funzioni goniometriche inverse

Considerata la funzione y=senx è possibile invertirla, sotto opportune condizioni, e si ottiene la funzione :

y=arcsen x

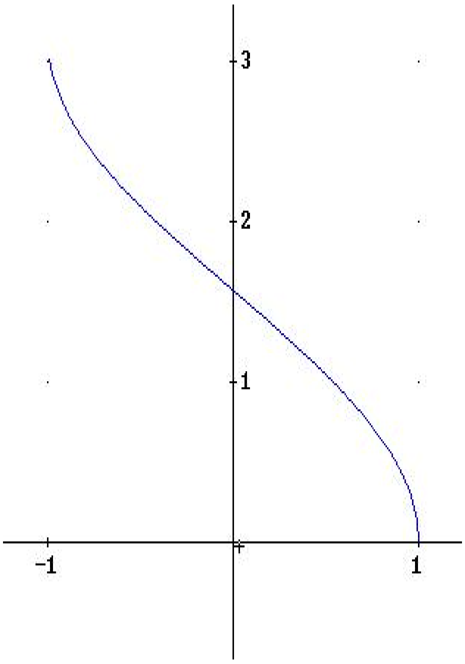
definita per $-1 \leq x \leq 1$, a valori in $-\pi/2 \leq f(x) \leq \pi/2$



nello stesso modo se operiamo con la y = cos x otteniamo la

y = arccos x

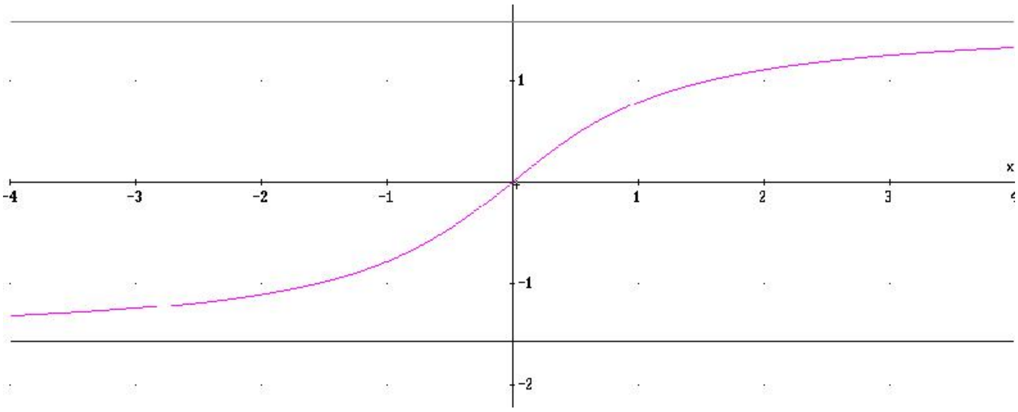
definita per $-1 \leq x \leq 1$, a valori in $0 \leq f(x) \leq \pi$



e con $y = \text{tg}\, x$ si ha:

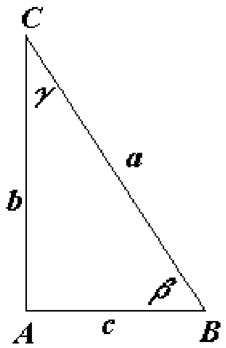
y = arctg x

definita per ogni x , a valori in $-\pi/2 \leq f(x) \leq \pi/2$



Appendice 2

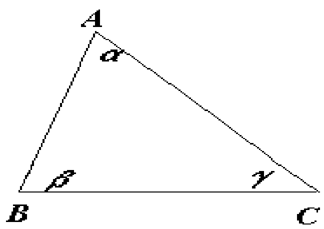
Relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo



b = a senβ c = a senγ
b = a cosγ c = a cosβ

b = c tgβ c = b tgγ
b = c cotgγ c = b cotgβ

Relazioni tra gli elementi di un triangolo qualsiasi



I due seguenti teoremi si utilizzano quando di un triangolo qualsiasi devo determinare lati e angoli

Teorema dei seni: $\frac{a}{sen\text{~}} = \frac{b}{sen} = \frac{c}{sen\text{¥}}$ si utilizza se sono noti due lati e un angolo ad essi opposto, oppure un lato e due angoli qualunque

Esempio

$$\text{~} = 30^0, \quad = 45^0, a = 16 \Rightarrow \frac{\sin 30}{16} = \frac{\sin 45}{b} \Rightarrow b = 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \approx 22.62$$

$$\text{~} = 40^0, b = 15, a = 25 \Rightarrow \frac{\sin 40}{25} = \frac{\sin}{15} \Rightarrow \sin \quad \approx 0.38$$

Teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ si utilizza quando del triangolo sono noti due lati e l'angolo tra essi compreso oppure tre lati.

Esempio

$$\text{¥} = 60^0, a = 5, b = 8 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^0 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49$$

per cui

$c = 7, a = 5, b = 6 \Rightarrow \cos\text{¥} = 0.2, \text{¥} \approx 1.37$ (radianti: $\approx 78.7^0$)