UNITÀ

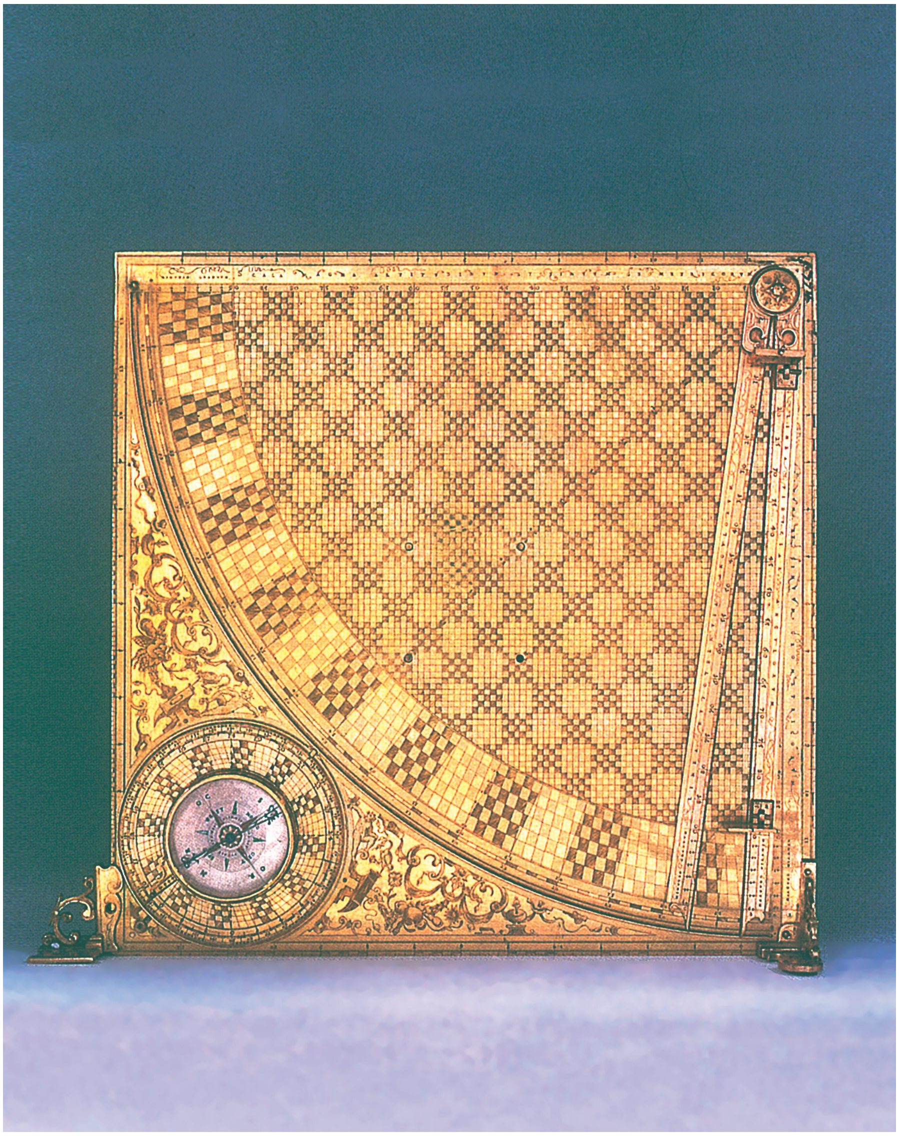
A1

Angoli e funzioni goniometriche

TEORIA

LABORATORIO INFORMATICO

AUTOVALUTAZIONE



Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze

Questo quadrante, costruito nel 1608 da Tobias Volkmer, matematico e orafo dei duchi di Baviera, poteva essere usato in astronomia, in topografia e per scopi militari. La fitta quadrettatura serve per il calcolo dei seni e dei coseni. L'arco graduato è provvisto di nonio. La bussola in basso a sinistra, amovibile, segnala la differenza fra nord geografico e nord magnetico. Anche il retro del quadrante è finemente inciso e presenta diverse funzioni.

Questo file è una estensione online del corso Cannarozzo, Cucchiarini, Meschieri, *Misure, rilievo, progetto*

1. Definizioni di angolo

Angolo

La geometria definisce **angolo** ciascuna delle parti del piano in cui esso è diviso da due semirette uscenti da uno stesso punto O; il punto O si dice **vertice** dell'angolo e le due semirette (OA e OB) si dicono *lati*.

Un angolo si indica abitualmente con la notazione letterale $A\widehat{O}B$, oppure con una lettera minuscola dell'alfabeto greco: α, β, γ, δ ecc., ma anche con le lettere minuscole x, y quando è incognito.

Angolo orientato

Per eliminare l'intrinseca ambiguità della precedente definizione è necessario *estendere* il concetto di angolo, assumendo una delle due semirette che lo generano (per esempio OA) come **origine** e definendo il **senso di rotazione orario** come senso positivo per le rotazioni.

Un angolo di vertice O e *semiretta origine* $OA = a$ si dice **orientato positivamente** (▶FIGURA 1) quando questa deve ruotare in senso **orario** intorno a O per sovrapporsi al lato $OB = b$ (*lato estremo*). Si dice **orientato negativamente** se la stessa rotazione avviene in senso antiorario.

Nel nostro contesto si fa riferimento in genere ad *angoli positivi*, dunque legati alla rotazione *oraria* della semiretta origine.

L'angolo orientato positivo di lati OA e OB in ▶FIGURA 1 viene indicato con la notazione $A\widehat{O}B$ (le *prime due lettere* indicano sempre il *lato origine*); mentre quello di ▶FIGURA 2 (sempre positivo) viene indicato con la notazione $B\widehat{O}A$ (dunque le notazioni $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}A$ indicano angoli orientati diversi).

Gli angoli orientati poi, possono essere maggiori dell'angolo giro; infatti, se immaginiamo che il lato origine OA dell'angolo $A\widehat{O}B$ vada a sovrapporsi al lato estremo OB dopo aver descritto *uno o più angoli giri* completi, si ottiene un angolo con ampiezza maggiore dell'angolo giro.

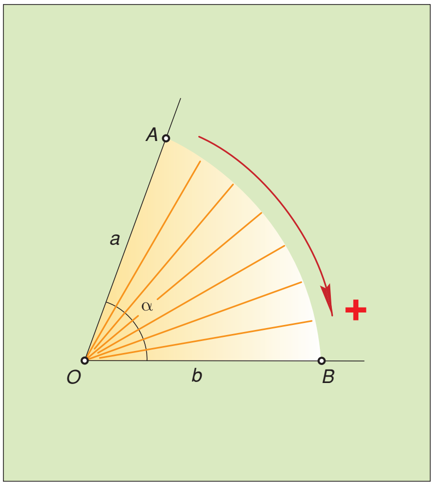


FIGURA 1 Rotazione in senso orario della semiretta *OA* intorno al punto *O* per definire l'angolo $\alpha = A\widehat{O}B$ positivo.

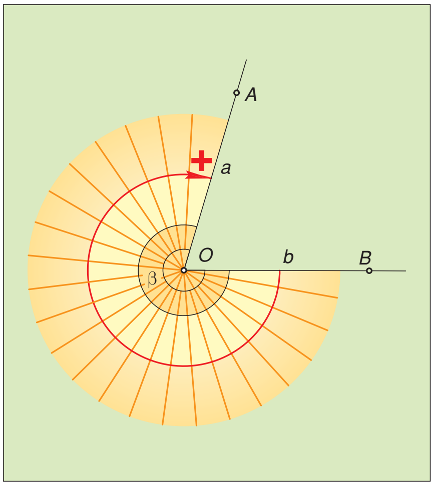


FIGURA 2 Rotazione in senso orario della semiretta *OB* per definire $\beta = B\widehat{O}A$.

FAQ

▶ Che cosa sono gli angoli orientati?

Sono le porzioni di piano descritte dalla semiretta origine durante la rotazione, in senso orario, per andarsi a sovrapporre all'altra semiretta dell'angolo.

FAQ

▶ Che vantaggi offrono gli angoli orientati?

Essi eliminano l'ambiguità connessa alla definizione geometrica di angolo (parte concava o parte convessa del piano definite dalle due semirette). Inoltre hanno senso sia gli angoli negativi che quelli di ampiezza maggiore dell'angolo giro.

2. Misura degli angoli

Il radiante

Gli angoli sono grandezze misurabili, il che impone l'adozione di una *unità di misura*. Nelle valutazioni teoriche tale unità di misura è il *radiante*.

> Il **radiante** è definito come l'*angolo al centro* in un cerchio di raggio arbitrario R che sottende un arco il cui sviluppo l è uguale allo stesso raggio R (per rad = 1 è $l = R$).

Dunque, per ottenere l'ampiezza in radianti di un generico angolo $\alpha = A\widehat{O}B$ occorre far riferimento a un cerchio con centro in O e raggio arbitrario $R = \overline{OA} = \overline{OB}$, all'arco l intercettato sul cerchio dalle due semirette OA e OB, ed eseguire il seguente rapporto (▶FIGURA **3**):

$$\alpha^{\text{rad}} = \frac{l}{R} \qquad (1)$$

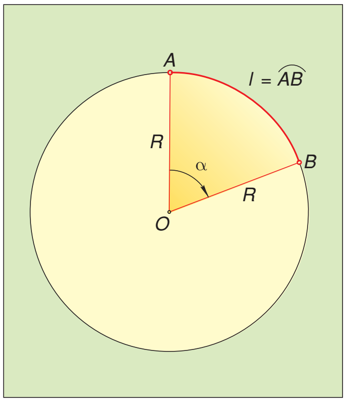


FIGURA 3 La misura di α in radianti è data dal rapporto fra la lunghezza dell'arco sotteso e il raggio della circonferenza di centro *O*.

Naturalmente per $l = R$ si ha $\alpha^{\text{rad}} = 1$. Da semplici valutazioni sulla precedente definizione si ha:

$$\textit{angolo giro}: \quad \frac{2\pi R}{R} = 2\pi = 6^{\text{rad}},28318...$$

$$\textit{angolo piatto}: \quad \frac{\pi R}{R} = \pi = 3^{\text{rad}},14159...$$

$$\textit{angolo retto}: \quad \frac{\pi R}{2R} = \frac{\pi}{2} = 1^{\text{rad}},57079...$$

FAQ

▶ Che cos'è il radiante?

È l'unità per la misura delle ampiezze degli angoli usata nel contesto teorico-matematico. È definito dal rapporto tra lo sviluppo dell'arco di cerchio compreso tra le due semirette e il raggio arbitrario dello stesso cerchio il cui centro coincide con l'intersezione delle stesse semirette.

I sistemi di misura operativi

Il radiante come unità di misura degli angoli è conveniente in tutte le considerazioni di carattere teorico, mentre la stessa unità di misura è poco efficace in tutte le elaborazioni di carattere pratico-applicativo. In tale ambito è necessario definire altre unità di misura degli angoli che danno luogo a *sistemi di misura angolari*

TABELLA 1 **Sistemi di misura angolare**

	Sistema sessagesimale	Sistema decimale	Sistema centesimale
Unità	**Grado sessagesimale**, indicato con l'apice (°), è **1/90** dell'angolo retto.	**Grado sessagesimale**, indicato con l'apice (°), è **1/90** dell'angolo retto.	**Grado centesimale**, indicato con (^{c}), (^{g}) o (gon), è **1/100** dell'angolo retto.
Sottomultipli	Il **primo** sessagesimale, indicato con (′), è 1/60 del **grado**. Il **secondo** indicato con (″), è 1/60 del **primo** (quindi 1/3600 del grado).	**Decimi**, **centesimi**, **millesimi**, ecc. di *grado sessagesimale*. Quindi un angolo espresso in questo sistema di misura si comporta come un normale **numero decimale**.	**Decimi**, **centesimi**, **millesimi**, ecc. di *grado centesimale*. Talvolta (raramente) si parla di **primi** ($^-$) centesimali [prima coppia di cifre decimali] e **secondi** ($^=$) centesimali [seconda coppia cifre decimali].
Impieghi	È un sistema di misura adatto ai calcoli **mnemonici**, pertanto veniva preferito soprattutto in passato. In esso **non** valgono le regole dell'aritmetica decimale, ma regole analoghe a quelle del **sistema orario**.	È un sistema conveniente nel calcolo con mezzi meccanici, come le attuali **calcolatrici** tascabili. Le operazioni aritmetiche vengono eseguite con le familiari regole della numerazione **decimale**.	Come il sistema decimale è adatto al calcolo meccanico, nel rispetto delle regole della numerazione **decimale**. È quasi universalmente adottato in **Topografia**, per la sua grande praticità operativa.
Es.	142° 17′ 26″	142°,2905	158^c,4276 [158^{c}42$^-$76$^=$]

(*sessagesimale*, *decimale* e, in particolare, *centesimale*) alternativi a quello prima definito (*sistema analitico*). Nella ▶TABELLA 1 sono definite le unità di misura e descritte le caratteristiche dei tre **sistemi di misura angolare** utilizzati nei contesti pratico-operativi.

Conversione tra sistemi di misura angolari

Qualunque sia il sistema di misura adottato, l'ampiezza degli angoli rimane invariata, il che significa che il rapporto tra la misura di un angolo, in un qualunque sistema, e l'**angolo piatto**, espresso nello stesso sistema, deve restare invariata. Si può, quindi, scrivere:

$$\frac{\alpha^{rad}}{\pi} = \frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}} \qquad \frac{\alpha^{rad}}{\pi} = \frac{\alpha^{c}}{200^{c}} \qquad \frac{\alpha^{c}}{200^{c}} = \frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}}$$

Utilizzando di volta in volta una di queste tre relazioni è possibile **convertire** l'ampiezza di un angolo, espressa in un dato sistema di misura, a quella espressa in uno qualunque degli altri sistemi. Le operazioni da eseguire per queste **conversioni tra sistemi di misura angolare** (che peraltro sono automatizzate in tutte le calcolatrici scientifiche) sono sintetizzate nelle ▶TABELLE 2, 3, 4.

TABELLA 2 **Conversioni di un angolo espresso in gradi sessagesimali (α°)**

	Gradi decimali	Gradi centesimali	Radianti
Formule	$\text{gradi} + \frac{\text{primi}}{60} + \frac{\text{secondi}}{3600}$	Dopo la conversione in decimali: $\alpha^{c} = \alpha^{\circ}\frac{200}{180} = \alpha^{\circ}\frac{10}{9}$	Dopo la conversione in decimali: $\alpha^{rad} = \alpha^{\circ}\frac{\pi}{180}$
Esempi	$\alpha^{\circ} = 48^{\circ}17'26''$ $\alpha^{\circ} = 48^{\circ} + \frac{17}{60} + \frac{26}{3600} = 48^{\circ},2905$	$\alpha^{\circ} = 48^{\circ}17'26'' = 48^{\circ},2905$ $\alpha^{c} = 48^{\circ},2905\ \frac{10}{9} = 53^{c},6561$	$\alpha^{\circ} = 48^{\circ}17'26'' = 48^{\circ},2905$ $\alpha^{rad} = 48^{\circ},2905\ \frac{\pi}{180} = 0^{rad},8428$

TABELLA 3 **Conversioni di un angolo espresso in gradi centesimali (α^{c})**

	Gradi decimali	Gradi sessagesimali	Radianti
Formule	$\alpha^{\circ} = \alpha^{c}\frac{180}{200} = \alpha^{c}\frac{9}{10}$	Dopo la conversione in decimali: gradi + [(decimali gradi) · 60]′ + + [(decimali primi) · 60]″	$\alpha^{rad} = \alpha^{c}\frac{\pi}{200}$
Esempi	$\alpha^{c} = 71^{c},4568$ $\alpha^{\circ} = 71^{c},4568\ \frac{9}{10} = 64^{\circ},3111$	$\alpha^{c} = 71^{c},4568 = 64^{\circ},3111$ $\alpha^{\circ} = 64^{\circ} + 0^{\circ},3111 \cdot 60 = 64^{\circ}18',666 =$ $= 64^{\circ}18' + 0',666 \cdot 60 = 64^{\circ}18'40''$	$\alpha^{c} = 71^{c},4568$ $\alpha^{rad} = 71^{c},4568\ \frac{\pi}{200} = 1^{rad},1224$

TABELLA 4 **Conversioni di un angolo espresso in radianti (α^{rad})**

	Gradi decimali	Gradi sessagesimali	Gradi centesimali
Formule	$\alpha^{\circ} = \alpha^{rad}\frac{180}{\pi}$	Dopo la conversione in decimali: gradi + [(decimali gradi) · 60]′ + + [(decimali primi) · 60]″	$\alpha^{c} = \alpha^{rad}\frac{200}{\pi}$
Esempi	$\alpha^{rad} = 1^{rad},524$ $\alpha^{\circ} = 1^{rad},524\ \frac{180}{\pi} = 87^{\circ},3187$	$\alpha^{rad} = 1^{rad},524 = 87^{\circ},3187$ $\alpha^{\circ} = 87^{\circ} + 0^{\circ},3187 \cdot 60 = 87^{\circ}19',122 =$ $= 87^{\circ}19' + 0',122 \cdot 60 = 87^{\circ}19'07''$	$\alpha^{rad} = 1^{rad},524$ $\alpha^{c} = 1^{rad},524\ \frac{200}{\pi} = 97^{c},0208$

FAQ

▶ A che cosa serve il coefficiente 206 265?

Serve a trasformare l'ampiezza di un angolo espressa in radianti nel corrispondente valore espresso in secondi sessagesimali, e viceversa.

Quando si considerano angoli **molto piccoli**, può essere conveniente convertire il valore in radianti di tali angoli direttamente in *secondi sessagesimali* e *centesimali*. In effetti si ha:

$$\alpha'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60 \cdot \alpha^{rad}}{\pi} = 206\,265 \cdot \alpha^{rad}$$

$$\alpha^{=} = \frac{200 \cdot 100 \cdot 100 \cdot \alpha^{rad}}{\pi} = 636\,620 \cdot \alpha^{rad}$$

3. Funzioni goniometriche seno e coseno

Il cerchio goniometrico

Un **cerchio** si dice **goniometrico** quando il suo centro O è l'origine di un sistema di assi cartesiani OXY e il suo raggio R viene assunto uguale all'unità di misura dei segmenti (si dice perciò che il suo **raggio è unitario**: $R = 1$). Inoltre, per convenzione, indicato con A il punto di intersezione del cerchio con l'asse delle ordinate, il lato OA viene assunto quale *lato origine* degli angoli orientati α di vertice O (▶FIGURA 4).

Il riferimento al cerchio goniometrico, pur non indispensabile, permette di semplificare la definizione delle **funzioni goniometriche** e di valutarne rapidamente le caratteristiche.

Consideriamo un generico punto B sul cerchio goniometrico generato dal lato estremo OB dell'angolo al centro $\alpha = A\widehat{O}B$; possiamo osservare che la posizione del punto B sul cerchio **dipende solamente** dall'ampiezza dello stesso angolo α. Se ora **proiettiamo** B sull'asse delle ordinate (▶FIGURA 5), si viene a formare il *triangolo rettangolo* OBC di ipotenusa $\overline{OB} = R = 1$, e come effetto di quanto affermato prima, anche i cateti $\overline{BC}$ e $\overline{OC}$ di questo triangolo **dipendono solamente** dall'angolo α (mentre l'ipotenusa rimane sempre $R = 1$).

Dato poi che le lunghezze di tali cateti rappresentano pure le *coordinate cartesiane* di B, ne consegue che anche l'**ascissa** X_B e l'**ordinata** Y_B del punto B sono funzioni dell'angolo α, cioè a ogni valore di α corrisponde un determinato valore sia per l'ascissa X_B sia per l'ordinata Y_B del punto B.

FAQ

▶ Che cos'è il cerchio goniometrico?

È un cerchio convenzionale di raggio unitario ($R = 1$) e con centro coincidente con l'origine di un sistema cartesiano. Viene utilizzato per semplificare le definizioni delle funzioni goniometriche.

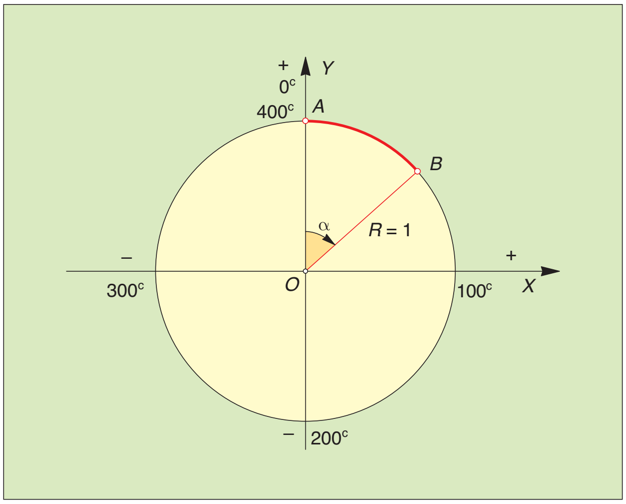


FIGURA 4 Cerchio goniometrico e angolo orientato α.

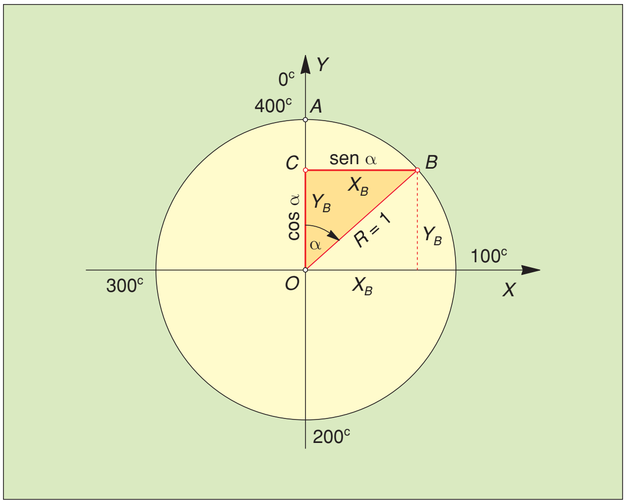


FIGURA 5 Un punto sul cerchio goniometrico ha per coordinate i valori delle funzioni seno e coseno.

Definizioni di seno e coseno

Fatta questa premessa, è possibile definire le seguenti funzioni della variabile dell'angolo α:

- viene definito **seno** dell'angolo α, e viene indicato con la notazione $\operatorname{sen}\alpha$, il rapporto tra il cateto $\overline{BC}$ (opposto all'angolo α) e l'ipotenusa $\overline{OB} = R$ del triangolo rettangolo OBC;
- viene definito **coseno** dell'angolo α, e viene indicato con la notazione $\cos\alpha$, il rapporto tra il cateto $\overline{OC}$ (adiacente all'angolo α) e l'ipotenusa $\overline{OB} = R$ del triangolo rettangolo OBC:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BC}}{R} \qquad \cos\alpha = \frac{\overline{OC}}{R} \tag{2}$$

Dal punto di vista dimensionale è possibile osservare come tali funzioni siano **numeri puri**, perché definiti dal rapporto di due grandezze della stessa specie. Considerando poi che nel cerchio goniometrico $\overline{OB} = R = 1$, le precedenti definizioni (2) diventano:

$$\operatorname{sen}\alpha = \overline{BC} = X_B \qquad \cos\alpha = \overline{OC} = Y_B \tag{3}$$

Come si vede la semplificazione nell'impiego del cerchio goniometrico consiste nel fatto che in tale ambito i **valori** delle funzioni seno e coseno sono di fatto coincidenti, rispettivamente, con le lunghezze dei **segmenti** BC e OC (o dalle coordinate cartesiane di X_B e Y_B); tale semplificazione è evidenziata in ▶FIGURA 5.

Tuttavia occorre sempre ricordare che nella realtà le funzioni seno e coseno non sono **segmenti**, ma rimangono sempre **rapporti di segmenti** (rapporti che nell'ambito del cerchio goniometrico presentano i denominatori uguali all'unità) e che le definizioni (2) rimangono inalterate anche al di fuori del cerchio goniometrico. Pertanto, anche se il valore di una funzione goniometrica di un angolo viene definito nell'ambito semplificato del cerchio goniometrico, esso assume comunque significato assoluto .

FAQ

▶ **Quali sono le unità di misura delle funzioni goniometriche?**

Nessuna: in realtà ciascuna funzione goniometrica è definita dal rapporto fra le lunghezze di due segmenti, pertanto è un numero adimensionale.

Valori di seno e coseno di 30°, 45° e 60°

Variazioni e periodicità delle funzioni seno e coseno

Facendo riferimento al cerchio goniometrico (▶FIGURA 6) in corrispondenza degli angoli che definiscono i **quattro quadranti**, è facile stabilire i valori delle funzioni seno e coseno (che sono 0, 1 o −1) in corrispondenza degli angoli $\alpha = 0°$; $\alpha = 90°$ (100^c); $\alpha = 180°$ (200^c); $\alpha = 270°$ (300^c). Inoltre sarebbe facile dimostrare che in corrispondenza degli angoli $\alpha = 30°$ ($33^c{,}3$); $\alpha = 45°$ (50^c); $\alpha = 60°$ ($66^c{,}6$); le funzioni seno e coseno assumono valori facili e utili da ricordare a memoria che, insieme ai precedenti, sono sintetizzati nella ▶TABELLA 5.

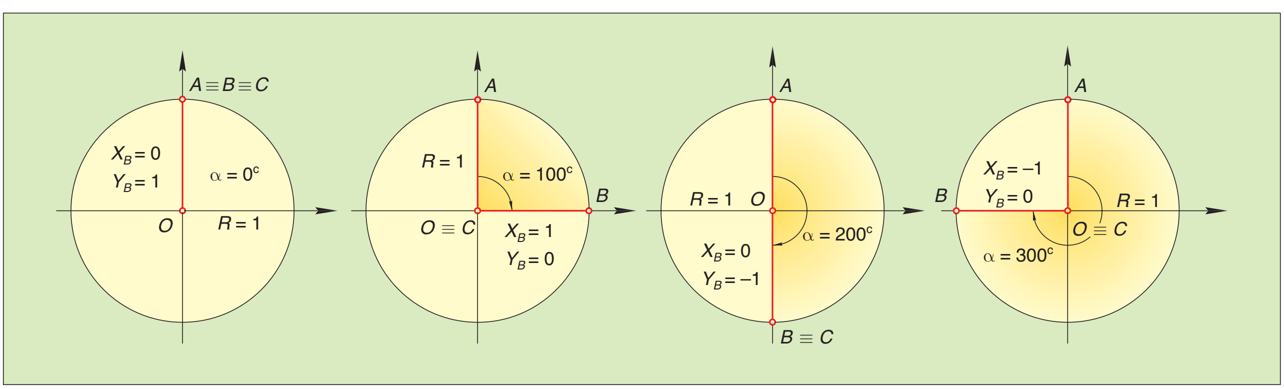


FIGURA 6 Angoli particolari per la determinazione dei valori delle funzioni seno e coseno.

FAQ

▶ I valori delle funzioni seno e coseno di uno stesso angolo hanno sempre valori diversi?

No, a 45° (ma anche per altri valori) le funzioni seno e coseno presentano lo stesso valore.

TABELLA 5 Valori delle funzioni seno e coseno per alcuni angoli notevoli

$\alpha =$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Più in generale, al variare dell'angolo α, le funzioni seno e coseno assumono valori reali sempre e comunque appartenenti all'intervallo da -1 a 1, valori estremi compresi. Questa rilevante situazione può essere sintetizzata dalle seguenti notazioni:

$$-1 \leq \text{sen}\,\alpha \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

Crescendo l'angolo α **oltre l'angolo giro**, $\alpha > 400^c$ ($\alpha > 360°$ o $\alpha > 2\pi$), i valori della funzione seno e della funzione coseno si **ripetono periodicamente**.

Possiamo allora affermare che seno e coseno sono **funzioni periodiche** con periodo di 400^c. Ciò significa che tali funzioni dopo un angolo giro tornano ad assumere gli stessi valori (per esempio sen 485^c = sen 85^c).

Più in generale (con n intero) possiamo scrivere:

$$\text{sen}(\alpha + n\,400^c) = \text{sen}\,\alpha \qquad \cos(\alpha + n\,400^c) = \cos\alpha$$

4. Funzioni goniometriche tangente e cotangente

Con riferimento alla ▶FIGURA 7, è possibile definire le ulteriori seguenti funzioni dell'angolo α:

- viene definita **tangente** dell'angolo α, e indicata con la notazione tg α, il rapporto (quando esiste) tra il cateto $\overline{BC}$ (opposto all'angolo α) e il cateto $\overline{OC}$ (adiacente all'angolo α) del triangolo rettangolo OBC;
- viene definita **cotangente** dell'angolo α, e indicata con la notazione cotg α, il rapporto (quando esiste) tra il cateto $\overline{OC}$ (adiacente all'angolo α) e il cateto $\overline{BC}$ (opposto all'angolo α) del triangolo retto OBC:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{BC}} \tag{4}$$

Anche i valori di queste funzioni sono **numeri puri**. Inoltre, così come per le funzioni seno e coseno, anche le funzioni tangente e cotangente posseggono un **significato semplificato** nell'ambito del cerchio goniometrico, in cui i valori di queste funzioni coincidono con le lunghezze di determinati segmenti. In effetti, considerando la ▶FIGURA 7 e tracciando la **tangente geometrica** al cerchio goniometrico nel punto A, rimane definito il punto T intersezione tra la stessa tangente e il prolungamento del lato estremo OB dell'angolo α. La lunghezza del segmento AT (oppure l'ascissa X_T di T) coincide con il valore della funzione tangente dell'angolo α.

FAQ

▶ Cosa significa affermare che le funzioni goniometriche sono periodiche?

Significa che dopo un determinato intervallo (360° per seno e coseno, 180° per tangente e cotangente) riproducono gli stessi valori.

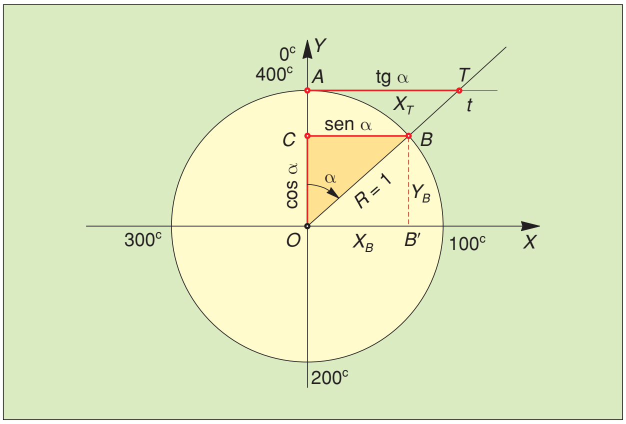


FIGURA 7 Definizione della funzione trigonometrica tangente.

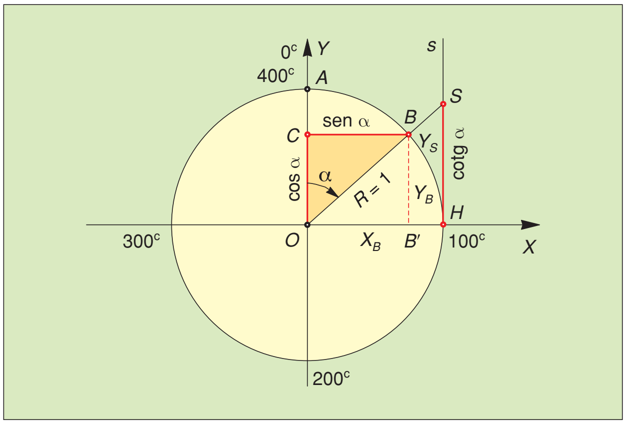


FIGURA 8 Definizione della funzione trigonometrica cotangente.

Analogamente, tracciando la tangente geometrica al cerchio goniometrico nel punto H (▶FIGURA 8), la lunghezza del segmento HS (oppure l'ordinata Y_S di S) coincide con il valore della funzione cotangente dell'angolo α. In definitiva, nell'ambito del cerchio goniometrico, le precedenti definizioni (4) diventano:

$$\text{tg}\,\alpha = \overline{AT} = X_T \qquad \text{cotg}\,\alpha = \overline{HS} = Y_S \tag{5}$$

Osservando poi le (2) e le (4) sono evidenti le seguenti relazioni:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} \tag{6}$$

Esistenza delle funzioni tangente e cotangente

Mentre le funzioni seno e coseno **esistono sempre** (cioè forniscono sempre un numero reale per qualsiasi angolo α (dunque sono funzioni **continue**), ciò non è vero per le funzioni **tangente** e **cotangente**; esse, infatti, **non esistono per particolari angoli** che annullano i denominatori delle (4).

Se ci limitiamo a considerare angoli minori dell'angolo giro la funzione tangente **non esiste** a 100^c e 300^c, mentre la funzione cotangente **non esiste** a 0^c e 200^c. Questi valori angolari rappresentano punti di **discontinuità** per le due funzioni (che pertanto sono dette **discontinue**).

Tuttavia un po' prima o un po' dopo questi valori (▶FIGURE 9 e 10), le funzioni tangente e cotangente assumono valori **molto grandi** con segno positivo (+ ∞, *più infinito*) oppure negativo (− ∞ *meno infinito*). Ciò giustifica le **notazioni convenzionali del tipo**:

$$\text{tg}\,100^c = \pm\,\infty \qquad \text{cotg}\,200^c = \mp\,\infty$$

al posto delle notazioni formalmente corrette: tg 100^c = *non esiste*; cotg 200^c = *non esiste*.

Variazioni e periodicità delle funzioni tangente e cotangente

Dal comportamento delle funzioni tangente e cotangente in corrispondenza degli angoli che separano i quattro quadranti esaminati al punto precedente, e ricordando le relazioni (6), possiamo costruire la ▶TABELLA 6 in cui sono raccolti i valori delle due funzioni in corrispondenza degli angoli già considerati nel caso delle funzioni seno e coseno.

FAQ

▶ Per quale ragione le calcolatrici non possiedono un tasto dedicato al calcolo del valore della funzione cotangente?

Perché la cotangente di un angolo può essere ottenuta utilizzando il valore della tangente dello stesso angolo, facendone poi il reciproco.

FAQ

▶ I valori delle funzioni tangente e cotangente di un angolo sono sempre ottenibili come lunghezza di un segmento?

No, le due funzioni sono rappresentate dalla lunghezza di un segmento *solo* nell'ambito del cerchio goniometrico.

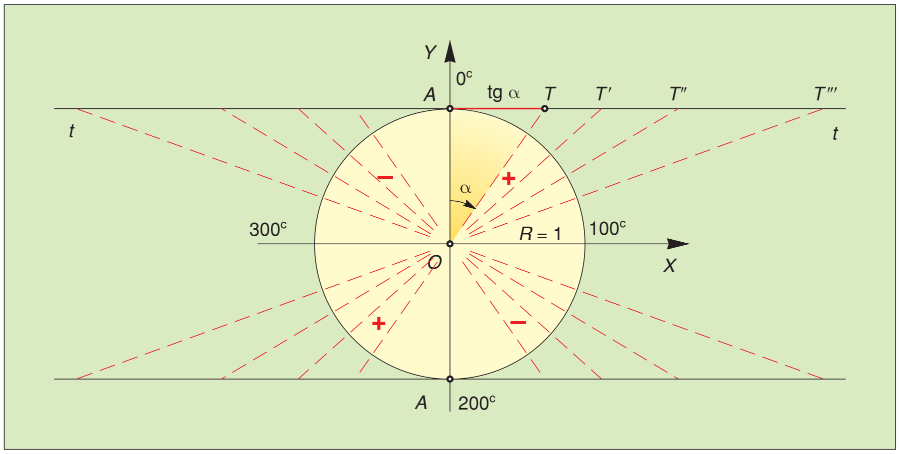


FIGURA 9 Variazione della funzione tangente.

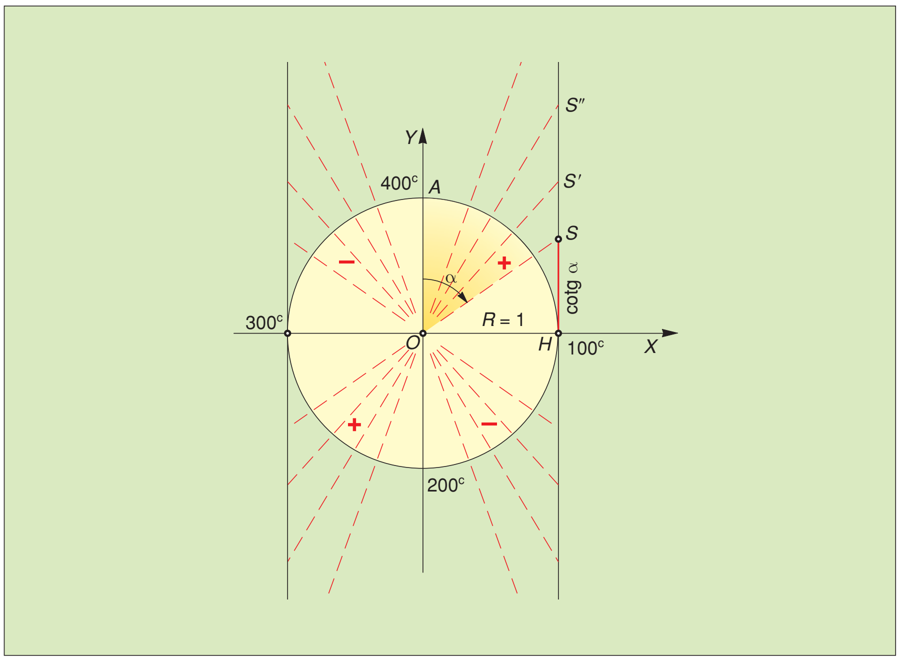


FIGURA 10 Variazione della funzione cotangente.

TABELLA 6 Valori delle funzioni tangente e cotangente per alcuni angoli notevoli

$\alpha =$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
cotg α	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

Osservando le ▶FIGURE 9 e 10, e considerando le relazioni (6), possiamo renderci conto dei segni che le funzioni tangente e cotangente assumono nei vari quadranti. Inoltre, si può affermare che le funzioni tangente e cotangente assumono, al variare dell'angolo α, **tutti i valori reali** compresi nell'intervallo $-\infty, +\infty$. Tale situazione può essere sintetizzata dalle seguenti notazioni:

$$-\infty \leq \text{tg}\,\alpha \leq +\infty \qquad -\infty \leq \text{cotg}\,\alpha \leq +\infty$$

FAQ

▶ La funzione tangente esiste per qualsiasi angolo?

No, in corrispondenza di certi valori angolari (es. 90°) la funzione tangente non esiste. Un po' prima o un po' dopo questi valori la tangente assume valori assoluti molto grandi con segno positivo o negativo.

Da quanto esposto, si può osservare che anche le funzioni tangente e cotangente sono **periodiche**, ma con **periodo** di 200^c (angolo piatto). In effetti quando l'angolo α cresce da 200^c a 400^c, la tangente e la cotangente assumono, nello stesso ordine, gli stessi valori che presentano quando l'angolo α varia da 0^c a 200^c. Possiamo allora affermare, per fare un esempio, che tg 244^c = tg 44^c, o che cotg 356^c = cotg 156^c. Più in generale (con n intero) possiamo scrivere:

$$\text{tg}(\alpha + n \cdot 200^c) = \text{tg}\,\alpha \qquad \text{cotg}(\alpha + n \cdot 200^c) = \text{cotg}\,\alpha$$

5. Valori delle funzioni goniometriche

Fin qui sono stati considerati i valori delle funzioni goniometriche per **angoli particolari** (0°, 30°, 45°, 90°, 180° ecc.). Tuttavia nella pratica è necessario determinare i valori delle funzioni goniometriche riferite non solo ad angoli particolari, ma anche ad angoli qualunque (per esempio sen 73°,42; tg 45^c,326).

Oggi il calcolo di tali valori viene effettuato con le macchine **calcolatrici tascabili** di tipo **scientifico**. Le modalità di impiego di tali calcolatrici tascabili, nel calcolo dei valori delle funzioni goniometriche, dipendono dalle caratteristiche che queste presentano e che variano da una casa costruttrice all'altra. Lasciamo perciò come esercizio al lettore il compito di verificare, sul libretto di istruzioni della propria calcolatrice, le sequenze da attivare per ottenere i valori delle funzioni cercate. Una volta acquisito l'uso della calcolatrice tascabile, sarà possibile, per esempio, calcolare i valori delle funzioni goniometriche per gli angoli compresi tra 0° e 360°, intervallandoli con un passo di 10° in 10°, e costruire la ▶TABELLA 7.

TABELLA 7 Valori delle funzioni goniometriche per angoli con passo di 10

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	...	340°	350°	360°
sen α	0	0,17365	0,34202	0,5	...	−0,34202	−0,17365	0
cos α	1	0,98481	0,93969	0,86602	...	+0,93969	+0,98481	1
tg α	0	0,17633	0,36397	0,57735	...	−0,36397	−0,17633	0
cotg α	–	5,67128	2,74748	1,73205	...	−2,74748	−5,67128	–

6. Grafici delle funzioni goniometriche

Tutte le funzioni goniometriche posseggono una caratteristica **rappresentazione grafica** che si estende infinitamente a sinistra e a destra. Tuttavia, essendo queste funzioni *periodiche*, le caratteristiche di tali grafici possono essere valutate compiutamente nell'ambito del primo angolo giro, dunque limitando l'analisi nell'intervallo compreso tra 0° e 360°.

Funzioni seno e coseno

Per costruire i **grafici** delle funzioni y = sen α e y = cos α, occorre scegliere una **scala convenzionale** di rappresentazione degli angoli (per esempio 5 mm = 10°), poi riportare sull'asse delle ascisse i valori degli angoli compresi tra 0° e 360° e sull'asse delle ordinate i corrispondenti valori del seno e del coseno (ad esempio usando quelli contenuti nella ▶TABELLA 7), fissando preventivamente anche in questo caso una opportuna *scala convenzionale* di rappresentazione (per esempio 4 cm = 1).

I grafici che si ottengono sono chiamati rispettivamente **sinusoide** e **cosinusoide**; le ▶FIGURE 11 e 12 riportano tali curve nel tratto di asse delle ascisse in

FAQ

▶ Esiste un quadrante in cui tutte le funzioni sono positive?

Sì, il primo (0°-90°).

FAQ

▶ Esiste un quadrante in cui tutte le funzioni sono negative?

No, in nessun quadrante si verifica la simultanea negatività di tutte le funzioni goniometriche.

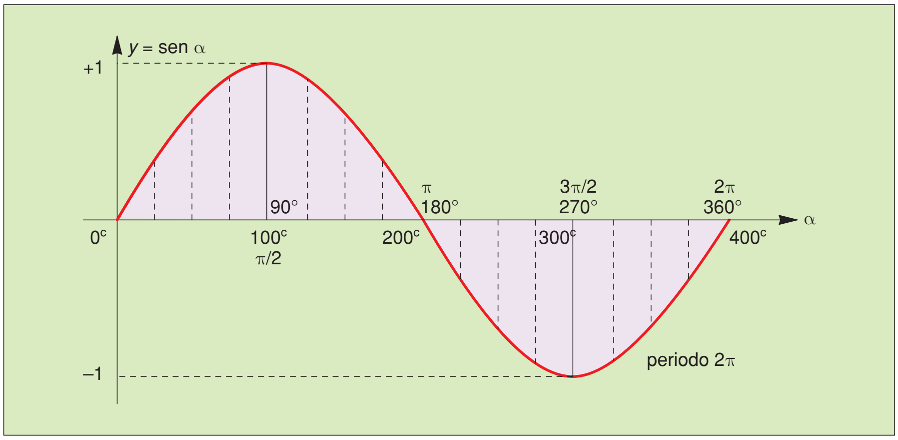


FIGURA 11 Porzione del diagramma della funzione y = sen α per α compreso tra 0° e 360°.

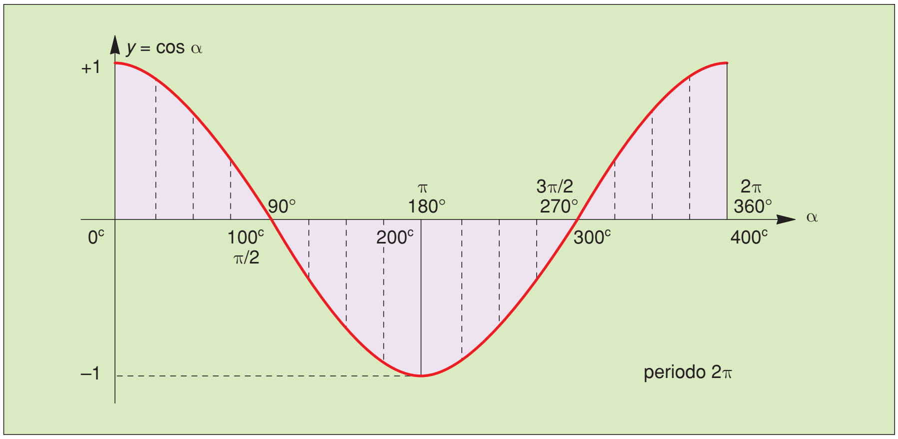


FIGURA 12 Porzione del diagramma della funzione y = cos α per α compreso tra 0° e 360°.

cui gli angoli sono compresi tra 0° e 360° (0^c e 400^c), cioè nell'ambito del primo angolo giro.

Funzioni tangente e cotangente

Analogamente possiamo costruire grafici delle funzioni y = tg α e y = cotg α. Tali grafici sono chiamati rispettivamente **tangentoide** e **cotangentoide**; le ▶FIGURE 13 e 14 riportano tali curve nel tratto di asse delle ascisse in cui gli angoli sono compresi tra 0^c e 400^c (0° e 360°). Osserviamo che le parallele all'asse Y tracciate per $\alpha = 100^c$ e $\alpha = 300^c$, rappresentano *asintoti* per la funzione tangente; analogamente l'asse Y e la parallela all'asse Y tracciata per $\alpha = 200^c$, rappresentano *asintoti* per la funzione cotangente.

FAQ

▶ L'estensione, sull'asse delle ascisse, delle rappresentazioni grafiche di seno e coseno sono limitate solo a certi intervalli?

No, le due rappresentazioni sono illimitate sia a destra dell'asse y (angoli positivi) sia a sinistra (angoli negativi).

7. Relazioni tra le funzioni goniometriche di uno stesso angolo

Tra le funzioni goniometriche di uno **stesso angolo** α esistono **relazioni indipendenti**; due di queste sono la prima e la terza delle (6), che per comodità riproponiamo:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \tag{7}$$

Oltre a queste due relazioni indipendenti, è possibile ricavarne una terza (tra seno e coseno di uno stesso angolo) applicando il teorema di Pitagora al triango-

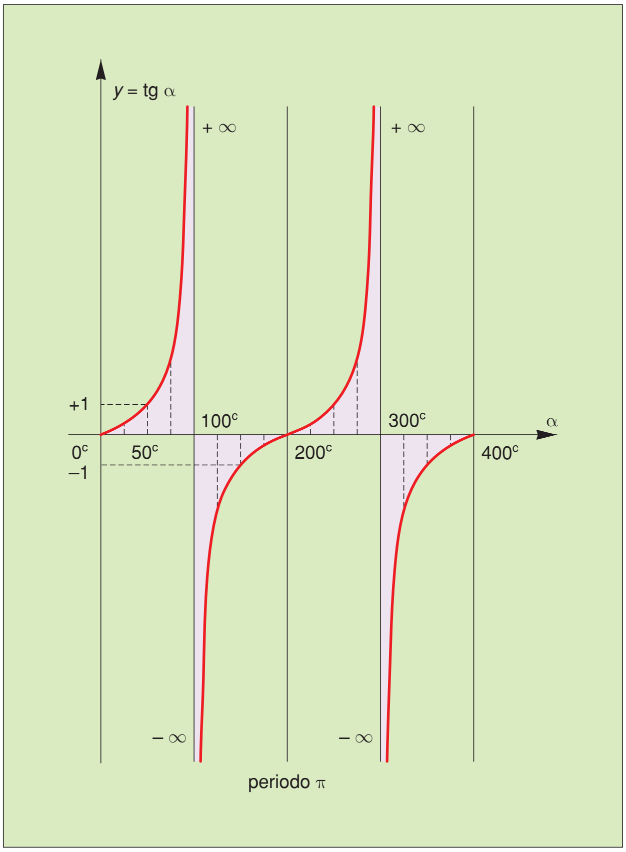


FIGURA 13 Porzione del diagramma della funzione y = tg α per α compreso tra 0^c e 400^c.

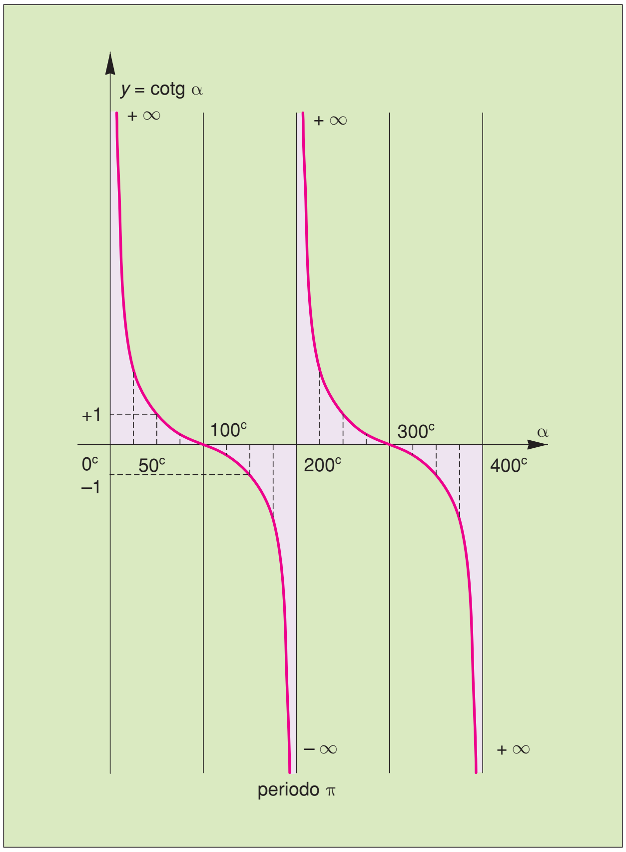


FIGURA 14 Porzione del diagramma della funzione y = cotg α per α compreso tra 0^c e 400^c.

lo retto *OBC* (▶FIGURA 15) nell'ambito del *cerchio goniometrico* (ricordando che $OB = R = 1$ è l'ipotenusa di tale triangolo). Considerando poi che in tale contesto le misure dei segmenti *CB* e *OC* rappresentano rispettivamente il seno e il coseno dell'angolo α, potremo scrivere quella che è nota come **relazione fondamentale della goniometria**:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{8}$$

FAQ

▶ Esiste una relazione che lega seno e coseno dello stesso angolo?

Sì, è la relazione detta fondamentale per la quale la somma dei quadrati del seno e del coseno di uno stesso angolo sono sempre uguali all'unità.

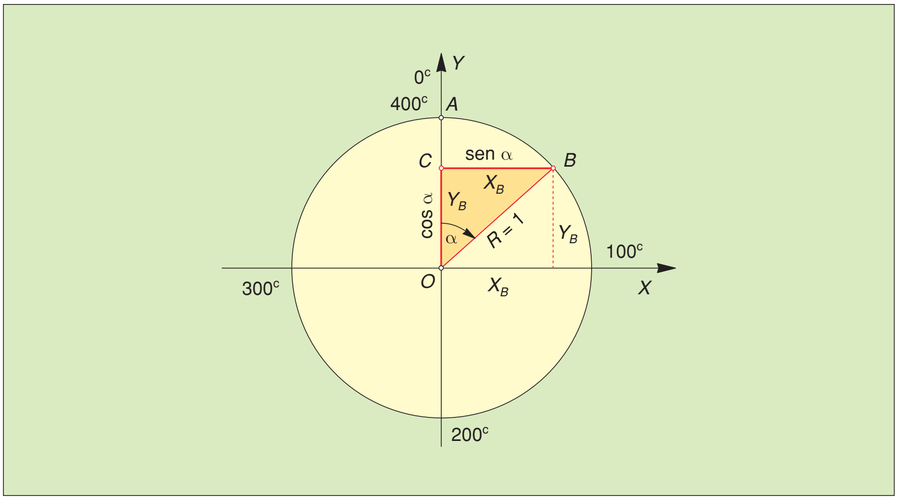


FIGURA 15 Applicando il teorema di Pitagora al triangolo retto *OBC* si ottiene la relazione fondamentale della goniometria.

FAQ

▶ Cosa sono le relazioni dipendenti della goniometria?

Sono relazioni ricavate dalle tre relazioni indipendenti, nelle quali ciascuna funzione goniometrica viene espressa in funzione delle altre.

TABELLA 8 Relazioni tra funzioni goniometriche di uno stesso angolo

	(sen α)	(cos α)	(tg α)	(cotg α)
sen α	sen α	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$
cos α	$\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$	cos α	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$
tg α	$\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	tg α	$\dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$
cotg α	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	cotg α

In essa, alle notazioni convenzionali $\operatorname{sen}^2\alpha$ e $\cos^2\alpha$, deve essere attribuito il significato seguente, più corretto sotto l'aspetto formale: $(\operatorname{sen}\alpha)^2$ e $(\cos\alpha)^2$. L'espressione (8) può essere così enunciata:

la **somma dei quadrati** dei valori del seno e del coseno di uno stesso angolo è uguale a **1**.

Naturalmente la relazione (8), anche se ricavata nell'ambito del cerchio goniometrico, ha validità generale per qualunque angolo α (per esempio: $\operatorname{sen}^2 76°,5 + \cos^2 76°,5 = 1$).

Le tre relazioni (7) e (8) sono, come si è detto, tra loro indipendenti, e da esse possono essere derivate ulteriori relazioni tra le funzioni goniometriche di uno stesso angolo α. La ▶TABELLA 8 raccoglie tali relazioni in cui in ogni riga ciascuna funzione goniometrica viene messa in relazione a una sola delle restanti. L'ambiguità relativa al doppio segno ± che compare in alcune formule, viene risolto valutando il **quadrante** di appartenenza dell'angolo α.

Funzioni goniometriche di uno stesso angolo

8. Relazioni tra le funzioni goniometriche di angoli associati

Si chiamano **angoli associati** all'angolo α quegli angoli (diversi da α) per i quali le funzioni goniometriche, in **valore assoluto**, sono uguali a quelle dell'angolo α.

Il **segno** del valore della funzione viene poi definito valutando il **quadrante** di appartenenza degli angoli associati.

Questa proprietà degli angoli associati consente di utilizzare un **angolo acuto** (I quadrante) per ottenere il valore assoluto di ciascuna funzione goniometrica relativa a un angolo appartenente a qualunque quadrante, in genere maggiore dell'angolo retto (per esempio per ottenere i valori delle funzioni dell'angolo 143^c, è possibile utilizzare l'angolo acuto 57^c).

Questa operazione è nota come **riduzione al I quadrante** (punto successivo) ed era indispensabile in passato per ottenere i valori delle funzioni goniometriche con le *tavole logaritmiche* (esse, infatti, contenevano solo i valori relativi agli

FAQ

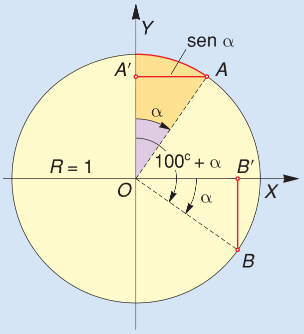
▶ Cosa sono gli angoli associati?

Sono angoli diversi, ma che presentano i valori assoluti delle funzioni goniometriche uguali. Per esempio due angoli supplementari sono anche associati.

TABELLA 9 Caratteristiche degli angoli associati

■ Angoli anticomplementari

α nel I quadrante
$(100^c + \alpha)$ nel II quadrante

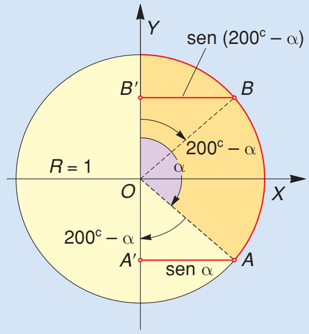


$\text{sen}\,(100^c + \alpha) = \cos\alpha$
$\cos\,(100^c + \alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$
$\text{tg}\,(100^c + \alpha) = -\,\text{cotg}\,\alpha$
$\text{cotg}\,(100^c + \alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha$

Esempio: $\text{sen}\,134^c = \text{sen}(100^c + 34^c) = \cos 34^c$

■ Angoli supplementari

α nel II quadrante
$(200^c - \alpha)$ nel I quadrante

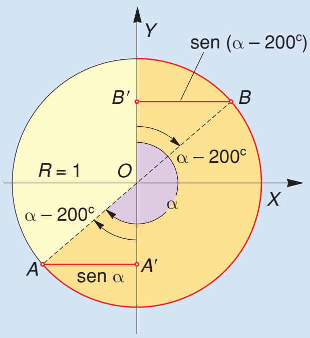


$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(200^c - \alpha)$
$\cos\alpha = -\cos\,(200^c - \alpha)$
$\text{tg}\,\alpha = -\,\text{tg}\,(200^c - \alpha)$
$\text{cotg}\alpha = -\,\text{cotg}\,(200^c - \alpha)$

Esempio: $\text{tg}\,168^c = -\,\text{tg}(200^c - 168^c) = -\,\text{tg}\,32^c$

■ Angoli antisupplementari (1)

α nel III quadrante
$(\alpha - 200^c)$ nel I quadrante

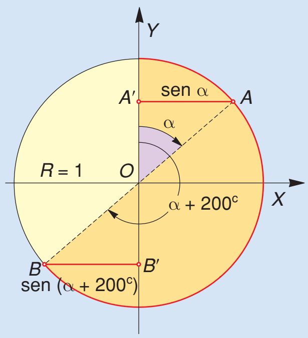


$\text{sen}\,\alpha = -\,\text{sen}\,(\alpha - 200^c)$
$\cos\alpha = -\cos\,(\alpha - 200^c)$
$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,(\alpha - 200^c)$
$\text{cotg}\,\alpha = \text{cotg}\,(\alpha - 200^c)$

Esempio: $\cos 272^c = -\cos(272^c - 200^c) = -\cos 72^c$

■ Angoli antisupplementari (2)

α nel I quadrante
$(\alpha + 200^c)$ nel III quadrante

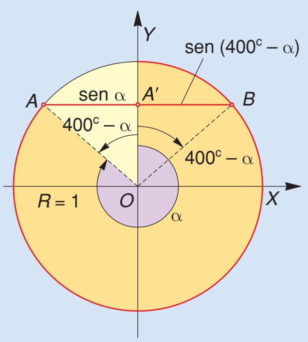


$\text{sen}\,(\alpha + 200^c) = -\,\text{sen}\alpha$
$\cos\,(\alpha + 200^c) = -\cos\alpha$
$\text{tg}\,(\alpha + 200^c) = \text{tg}\,\alpha$
$\text{cotg}\,(\alpha + 200^c) = \text{cotg}\,\alpha$

Esempio: $\text{sen}\,251^c = -\,\text{sen}(200^c + 51^c) = -\,\text{sen}\,51^c$

■ Angoli esplementari

α nel IV quadrante
$(400^c - \alpha)$ nel I quadrante

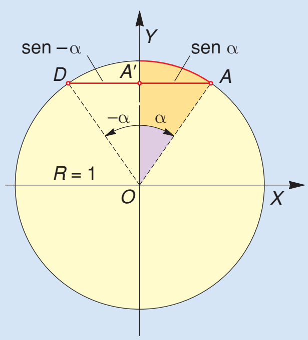


$\text{sen}\,\alpha = -\,\text{sen}\,(400^c - \alpha)$
$\cos\alpha = \cos\,(400^c - \alpha)$
$\text{tg}\,\alpha = -\,\text{tg}\,(400^c - \alpha)$
$\text{cotg}\alpha = -\,\text{cotg}\,(400^c - \alpha)$

Esempio: $\text{tg}\,337^c = -\,\text{tg}(400^c - 337^c) = -\,\text{tg}\,63^c$

■ Angoli opposti

α quadrante qualunque
$-\alpha$ quadrante qualunque



$\text{sen}\,(-\alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$
$\cos\,(-\alpha) = \cos\alpha$
$\text{tg}\,(-\alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha$
$\text{cotg}\,(-\alpha) = -\,\text{cotg}\,\alpha$

Esempio: $\cos\,(-28)^c = \cos 28^c$

angoli acuti). Oggi, per tale compito, l'uso delle calcolatrici scientifiche ha reso non indispensabile tale proprietà, che tuttavia è necessaria in altri contesti.
Gli angoli acuti α e $(100^c - \alpha)$ di un triangolo retto sono **complementari**, ma possono essere anche considerati **associati** in virtù delle relazioni (16) e (21) che saranno proposte nel prossimo paragrafo 10. Nella ▶TABELLA **9** sono sintetizzate le caratteristiche degli angoli associati in cui uno di questi è **maggiore dell'angolo retto**.

FAQ

▶ Le macchine calcolatrici fanno ricorso alla tecnica di riduzione al I quadrante?

No, tale tecnica era indispensabile con l'uso delle vecchie tavole nelle quali erano presenti solo gli angoli acuti (nel I quadrante, appunto).

Riduzione al primo quadrante

Considerando le proprietà degli angoli associati viste in precedenza, dato un angolo α con qualsiasi valore, è sempre possibile:

> trovare un angolo compreso tra 0^c e 100^c (dunque acuto e positivo), le cui funzioni goniometriche sono **uguali**, in **valore assoluto**, a quelle dell'angolo α dato. La ricerca di tale angolo acuto prende il nome di **riduzione al primo quadrante**.

Ad esempio:

- volendo il valore di cos 227°, possiamo ricorrere alle proprietà dei due angoli associati antisupplementari: 227° e (227° − 180°):

$$\cos 227^\circ = -\cos(227^\circ - 180^\circ) = -\cos 47^\circ$$

  quindi 47° è l'angolo ridotto al primo quadrante di 227°;
- analogamente volendo il valore di tg 354^c, facendo riferimento agli angoli associati esplementari, si ha:

$$\text{tg}\, 354^c = -\text{tg}\,(400^c - 354^c) = -\text{tg}\, 46^c$$

  quindi 46^c è l'angolo ridotto al primo quadrante di 354^c.

Qualora l'angolo α fosse *maggiore dell'angolo giro* (tenendo conto della periodicità delle funzioni goniometriche), prima di considerare gli angoli associati occorre togliere un numero intero di angoli giri. Per esempio:

$$\text{sen}\, 846^\circ = \text{sen}\,(846^\circ - 2 \cdot 360^\circ) = \text{sen}\, 126^\circ = \text{sen}\,(180^\circ - 126^\circ) = \text{sen}\, 54^\circ$$

9. Funzioni inverse

Definizione del problema connesso alle funzioni inverse

Esaminando le funzioni goniometriche abbiamo visto che a ogni angolo α corrisponde (quando esiste) sempre **un solo valore** per ciascuna delle funzioni goniometriche analizzate.

> Al contrario, vi sono **infiniti valori** dell'angolo α (di cui solo **due** nel primo angolo giro) corrispondenti a un assegnato valore r di una qualunque funzione goniometrica.

Tale situazione viene ben evidenziata nella ▶FIGURA 16, nella quale è rappresentata graficamente la funzione seno. Se immaginiamo di assegnare alla funzione seno il valore esemplificativo di 0,5, vediamo subito dalla figura che a questo va-

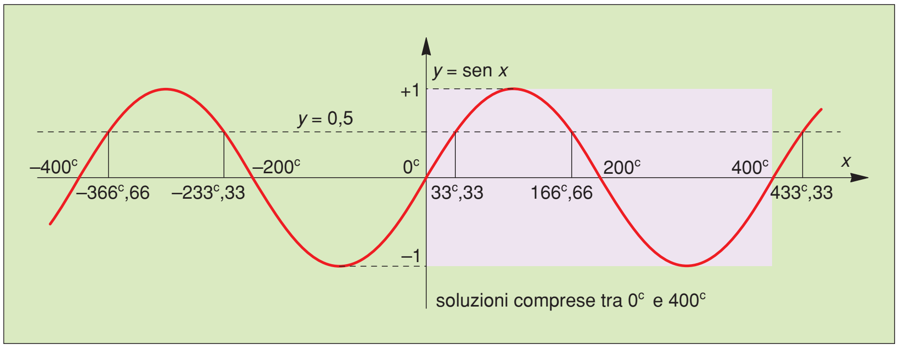


FIGURA 16 La funzione y = sen x assume un determinato valore, ad esempio 0,5, in corrispondenza di infiniti valori dell'angolo x.

lore della funzione corrispondono **infiniti valori** dell'angolo α tutti quelli individuati dalla **intersezione** della sinusoide di equazione $y = \text{sen}\,\alpha$ con la retta di equazione $y = 0{,}5$.

Nella risoluzione delle figure piane capita spesso di dover risolvere il problema definito **inverso**, cioè quello di *determinare tutti gli angoli che presentano un assegnato valore di una funzione goniometrica*.

Premettendo che vengono chiamate **equazioni trigonometriche** quelle uguaglianze che contengono funzioni goniometriche con angoli incogniti, il problema prima enunciato consiste nel risolvere **equazioni elementari** del tipo:

$$\begin{array}{lll} \text{sen}\,x = r & \text{con} & -1 \leq r \leq 1 \\ \cos x = s & \text{con} & -1 \leq s \leq 1 \\ \text{tg}\,x = v & \text{con} & -\infty \leq v \leq +\infty \end{array} \tag{9}$$

Per risolvere le equazioni (9) è necessario definire le **funzioni inverse** di seno, coseno e tangente. Esse consentono di ottenere il **primo dei valori** dell'angolo α (che essendo incognito viene indicato con x_1), corrispondente a un dato valore r, s, v della funzione considerata, dal quale sarà poi possibile determinare tutti gli infiniti altri valori, o solo il **secondo valore** x_2 se ci si limita al **primo angolo giro** (ambito nel quale si sviluppano le nostre problematiche), con valutazioni connesse alle proprietà delle funzioni.

Per ottenere questo **primo valore** x_1 dell'angolo α, è necessario limitare la definizione di queste nuove funzioni in **intervalli** angolari ben precisi e propri per ciascuna funzione.

La funzione inversa arcoseno

Consideriamo l'equazione $\text{sen}\,x = r$; essa presenta infinite le soluzioni x_1, x_2, x_3, x_4 ecc. (con x_1 e x_2 nel primo angolo giro). Per ottenere il **primo valore** x_1 consideriamo solo gli angoli x compresi nell'**intervallo**:

$$-100^c \leq x \leq 100^c$$

Nell'ambito di questo intervallo, a un assegnato valore di r (con $-1 \leq r \leq 1$), resta associato *un solo valore* di x, che pertanto è *funzione univoca* di r. Tale funzione è nota come **funzione inversa del seno** e viene chiamata **arcoseno**; essa viene scritta con la seguente notazione:

$$x = \text{arcsen}\,(r)$$

che significa, appunto, «x è l'angolo il cui seno è r» (nell'intervallo -100^c; $+100^c$). Il valore viene fornito dalla calcolatrice e, come detto, deve essere interpretato come *primo valore* x_1 ($|x_1| \leq 100^c$) delle soluzioni dell'equazione $\text{sen}\,x = r$. Il *secondo valore* x_2 viene poi determinato ricordando che la funzione seno presenta lo stesso valore per due angoli *supplementari*; allora, essendo x_1 (in valore assoluto) nel I quadrante, x_2 apparterrà al II quadrante e sarà fornito dall'ovvia relazione:

$$x_2 = 200^c - x_1$$

Le altre soluzioni x_3, x_4, x_5 ecc. (ma in generale a noi non servono), possono essere ricavate da x_1 e x_2 tenendo conto della periodicità della funzione seno.

Consideriamo, per esempio, la seguente equazione elementare:

$$\text{sen}\,x = 0{,}5$$

FAQ

► Assegnato un numero reale compreso tra −1 e 1, quanti angoli presentano il valore della funzione seno uguale a questo numero?

Infiniti.

FAQ

► In quale intervallo angolare la funzione inversa arcoseno viene definita?

Nell'intervallo $-100^c \leq x \leq 100^c$ nel quale, per un valore r (compreso tra −1 e 1), ad essa corrisponde un solo valore angolare x.

FAQ

▶ Assegnato un numero reale compreso tra −1 e 1, la funzione inversa arcocoseno fornisce sempre un valore angolare compreso tra 0° e 180°; perché?

Perché in questo intervallo esiste un solo angolo il cui coseno presenta un valore uguale al numero assegnato. In questo intervallo, cioè, la funzione *arcocoseno* è biunivoca.

La calcolatrice per arcsen (0,5) fornisce il valore $33^c{,}33$ che costituisce il primo valore delle soluzioni dell'equazione (pertanto $x_1 = 33^c{,}33$); per ottenere la seconda soluzione x_2 basta calcolare l'angolo supplementare di $33^c{,}33$. Dunque, le **prime due soluzioni** dell'equazione precedente (appartenenti al primo angolo giro) sono:

$$x_1 = 33^c{,}33 \qquad \text{e} \qquad x_2 = 200^c - 33^c{,}33 = 166^c{,}66$$

La funzione inversa arcocoseno

Con modalità perfettamente analoghe, se conveniamo di assumere per x, nell'equazione $\cos x = s$, solo gli angoli compresi nell'**intervallo**:

$$0^c \leq x \leq 200^c$$

L'equazione presenta *una sola soluzione*, e anche in questo caso x è una funzione univoca di s. Questa è la **funzione inversa del coseno** e viene chiamata **arcocoseno**, espressa dalla notazione:

$$x = \arccos\,(s)$$

Essa indica che x è l'angolo il cui coseno è s (nell'intervallo 0^c; 200^c). Anche in questo caso tale valore viene fornito dalla calcolatrice e costituisce il *primo valore* x_1 ($x_1 \leq 200^c$) delle soluzioni dell'equazione $\cos x = s$. Il *secondo valore* x_2 si trova ricordando che la funzione coseno presenta lo stesso valore per due angoli *esplementari*; allora, essendo $x_1 \leq 200^c$, x_2 sarà $\geq 200^c$ e verrà fornito dalla relazione:

$$x_2 = 400^c - x_1$$

Consideriamo, per esempio, la seguente equazione elementare:

$$\cos x = -0{,}4$$

La calcolatrice per arccos $(-0{,}4)$ fornisce il valore $126^c{,}19797$ che costituisce il *primo valore* delle soluzioni dell'equazione; per ottenere il *secondo valore* x_2 basta calcolare l'angolo esplementare di $126^c{,}19797$. Quindi, le prime due soluzioni dell'equazione precedente (appartenenti al primo angolo giro) sono:

$$x_1 = 126^c{,}19797 \qquad \text{e} \qquad x_2 = 400^c - 126^c{,}19797 = 273^c{,}80203$$

La funzione inversa arcotangente

Anche per ottenere le soluzioni x_1, x_2, x_3, x_4 ecc. dell'equazione $\text{tg}\, x = v$, occorre partire dal *primo valore* x_1 limitando i valori degli angoli x all'**intervallo**:

$$-100^c \leq x \leq 100^c$$

Esso ci assicura che a un assegnato valore di v resta associato *un solo valore* di x, che pertanto è *funzione univoca* di v; essa costituisce la **funzione inversa della tangente** e viene chiamata **arcotangente**:

$$x = \text{arctg}\,(v)$$

Tale valore viene fornito dalla calcolatrice e costituisce il *primo valore* x_1 delle soluzioni dell'equazione $\text{tg}\, x = v$. Il *secondo valore* x_2 viene poi determinato ricordando il periodo della funzione tangente:

$$x_2 = 200^c + x_1$$

Esaminiamo, per fissare le idee, la seguente equazione elementare:

$$\operatorname{tg} x = 0{,}3$$

Dalla calcolatrice per arctg (0,3) otteniamo il valore $18^c{,}55471$ (quindi $x_1 = 18^c{,}55471$); la seconda soluzione x_2 si ottiene aggiungendo 200^c a questo valore. Dunque, le prime due soluzioni sono:

$$x_1 = 18^c{,}55471 \quad \text{e} \quad x_2 = 200^c + 18^c{,}55471 = 218^c{,}55471$$

Caratteristiche in sintesi e notazioni convenzionali

Sintetizziamo le caratteristiche delle funzioni inverse nella ▶TABELLA 10.

TABELLA 10 Caratteristiche delle funzioni inverse

Funzione inversa	Notazione	Intervallo di definizione	2ª soluzione delle equazioni (9)
arcoseno di r [$\lvert r\rvert \leq 1$]	$x = \arcsin(r)$	$-100^c \leq x \leq 100^c$	$x_2 = 200^c - x$
arcocoseno di s [$\lvert s\rvert \leq 1$]	$x = \arccos(s)$	$0^c \leq x \leq 200^c$	$x_2 = 400^c - x$
arcotangente di v [$\lvert v\rvert \leq \infty$]	$x = \operatorname{arctg}(v)$	$-100^c \leq x \leq 100^c$	$x_2 = 200^c + x$

Nelle calcolatrici tascabili si è consolidata l'abitudine convenzionale (dovuta al limitato spazio sui tasti e al loro numero limitato) di accedere alle *funzioni inverse* preselezionando il tasto di **seconda funzione** (per esempio INV oppure SHIFT) prima del tasto della funzione desiderata, o indicando la funzione inversa con il **suffisso esponenziale** «$^{-1}$»:

$$\begin{array}{llll} \text{arcsen} & \rightarrow \text{INV} + \text{sen} & \text{oppure} & \text{sen}^{-1} \\ \text{arccos} & \rightarrow \text{INV} + \cos & \text{oppure} & \cos^{-1} \\ \text{arctg} & \rightarrow \text{INV} + \text{tg} & \text{oppure} & \text{tg}^{-1} \end{array}$$

Tuttavia non si deve far confusione attribuendo alle precedenti *notazioni convenzionali* significati algebrici che esse non hanno. Pertanto non si deve **mai** confondere la **funzione inversa** con l'**inverso della funzione**, secondo un'interpretazione erronea che le precedenti notazioni convenzionali potrebbero indurre e favorire. In definitiva occorre ricordare che la funzione inversa *arcoseno* (indicata nelle calcolatrici come *seno*$^{-1}$) assolutamente **non** equivale a 1/*seno*.

10. Risoluzione dei triangoli rettangoli

Osserviamo che nelle definizioni delle funzioni goniometriche compare sempre un **triangolo rettangolo** (o *retto*) in cui un angolo acuto corrisponde all'angolo α (variabile indipendente delle funzioni). Ciò permette di **risolvere** i triangoli retti prendendo in considerazione le funzioni goniometriche.

La **trigonometria** insegna a risolvere i **triangoli scaleni** (senza particolari proprietà), cioè permette di calcolare gli elementi incogniti quando si conoscono **tre elementi** del triangolo, tra i quali deve essere sempre compreso **almeno un lato** (o un altro elemento lineare).

FAQ

▶ Le notazioni usate nelle calcolatrici tascabili per indicare le funzioni inverse sono formalmente corrette?

No, sono inoltre fuorvianti in quanto inducono a considerare erroneamente la funzione inversa come l'inverso del valore assegnato. Ciò è giustificato solo dal poco spazio disponibile sui tasti.

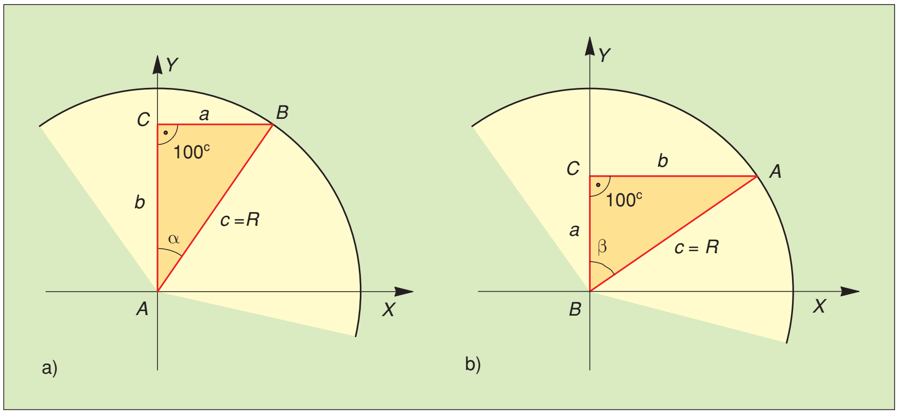


FIGURA 17 Relazioni trigonometriche per un triangolo rettangolo *ABC* assumendo come centro del cerchio adottato il vertice *A* (*a*) o il vertice *B* (*b*).

FAQ

► Quale rapporto intercorre tra gli angoli acuti di un triangolo rettangolo?

Sono complementari, quindi la loro somma è 90°.

Nel caso di un **triangolo rettangolo** un elemento è sempre noto; questo è l'*angolo retto*. Quindi, per risolvere un triangolo rettangolo basta assegnare **due elementi**, tra i quali **almeno un lato** (o, comunque, un elemento lineare).

Inoltre, indicando con α e β gli angoli acuti del triangolo retto, questi sono complementari quindi legati dalla relazione: $\alpha + \beta = 100^c$, da cui segue:

$$\alpha = 100^c - \beta \qquad \beta = 100^c - \alpha$$

Poiché, come si è detto, le definizioni delle funzioni goniometriche di un angolo orientato non dipendono dal raggio del cerchio adottato ma solo dall'angolo stesso, possiamo allora assumere l'ipotenusa $c = AB$ come raggio di tale cerchio, adottando come *centro* il vertice A e facendo coincidere il segmento $b = AC$ con l'asse Y delle ordinate (▶FIGURA 17*a*).

■ Utilizzo delle funzioni seno e coseno

Pensiamo poi di adottare le *convenzioni letterali* in essa rappresentate ($c = AB$ ipotenusa; $a = BC$ e $b = AC$ cateti; α angolo di vertice A; β angolo di vertice B), e di riformulare in tale ambito le definizioni (2) di seno e coseno, dunque limitandole ai soli angoli acuti:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \tag{10}$$

Dalle relazioni (10) si ricavano immediatamente le seguenti:

$$a = c \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad b = c \cdot \cos\alpha \tag{11}$$

$$c = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad c = \frac{b}{\cos\alpha} \tag{12}$$

Possiamo poi rifare la solita costruzione grafica, assumendo sempre l'ipotenusa $c = BA$ come raggio del cerchio, ma adottando, questa volta, come centro il vertice B (anziché A) e facendo coincidere il segmento $a = BC$ (anziché AC) con l'asse Y delle ordinate (▶FIGURA 17*b*). Riformulando le definizioni si ha:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} \tag{13}$$

$$b = c \cdot \operatorname{sen}\beta \qquad a = c \cdot \cos\beta \tag{14}$$

$$c = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \qquad c = \frac{a}{\cos\beta} \tag{15}$$

Dal confronto delle relazioni (11) e (14) e ricordando che ($\beta = 100^c - \alpha$), si vede che nei **triangoli rettangoli** si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \cos\beta = \cos(100^c - \alpha) \\ \cos\alpha &= \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(100^c - \alpha) \end{aligned} \tag{16}$$

Utilizzo delle funzioni tangente e cotangente

Allo stesso modo possiamo rivedere le definizioni delle funzioni tangente e cotangente dell'angolo α, riferendole allo schema di ▶FIGURA 17*a* (limitatamente agli angoli **acuti**):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} \tag{17}$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha \qquad b = a \cdot \operatorname{cotg}\alpha = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} \tag{18}$$

Ripetiamo la solita costruzione grafica, assumendo l'ipotenusa $c = BA$ come raggio del cerchio, ma come centro il vertice B (anziché A) e facendo coincidere il segmento $a = BC$ (anziché AC) con l'asse Y delle ordinate (▶FIGURA 17*b*). Riformulando le definizioni delle funzioni tangente e cotangente dell'angolo β (limitatamente agli angoli acuti):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{cotg}\beta = \frac{a}{b} \tag{19}$$

$$b = a \cdot \operatorname{tg}\beta \qquad a = b \cdot \operatorname{cotg}\beta = \frac{a}{\operatorname{tg}\beta} \tag{20}$$

Osservando le relazioni (18) e (20), si rileva che nei **triangoli rettangoli** si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}(100^c - \alpha) \\ \operatorname{cotg}\alpha &= \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(100^c - \alpha) \end{aligned} \tag{21}$$

Enunciati relativi alla risoluzione dei triangoli retti

Le relazioni precedenti permettono di proporre i seguenti **enunciati** che consentono la risoluzione dei triangoli retti quando sono incogniti **elementi lineari**:

In ogni triangolo rettangolo, la misura di un **cateto** è uguale al prodotto dell'**ipotenusa** per il **seno** dell'angolo **opposto** a quel cateto, oppure è uguale al prodotto dell'**ipotenusa** per il **coseno** dell'angolo **adiacente** a quel cateto.

In ogni triangolo rettangolo, la misura dell'**ipotenusa** è uguale al rapporto tra un **cateto** e il **seno** dell'angolo **opposto** a questo cateto; oppure è uguale al rapporto tra un **cateto** e il **coseno** dell'angolo a esso **adiacente**.

In ogni triangolo rettangolo, la misura di un **cateto** è uguale al prodotto dell'altro **cateto** per la **tangente** dell'angolo **opposto** al primo cateto, oppure è uguale al prodotto dell'altro **cateto** per la **cotangente** dell'angolo **adiacente** al primo cateto.

La ▶TABELLA **11** sintetizza le modalità risolutive dei triangoli rettangoli nei casi fondamentali determinati dai dati noti di partenza.

FAQ

▶ È possibile definire le funzioni trigonometriche nell'ambito di un triangolo rettangolo?

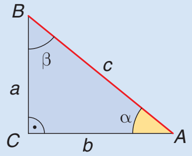
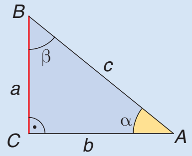
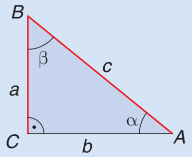
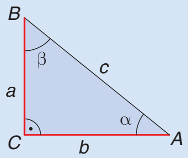
Sì, per gli angoli acuti. Per esempio la funzione seno di un angolo acuto di un triangolo rettangolo viene definita dal rapporto tra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa dello stesso triangolo.

FAQ

▶ Esiste una relazione tra le funzioni seno e coseno degli angoli acuti di un triangolo retto?

Sì, il seno del primo angolo acuto ha lo stesso valore del coseno del secondo.

TABELLA 11 Schemi risolutivi dei triangoli rettangoli

Caso	Schema geometrico	Elementi noti	1ª soluzione	2ª soluzione
1		Ipotenusa *c* Angolo α	$\beta = 100^c - \alpha$ $a = c \cdot \text{sen}\,\alpha$ $b = c \cdot \cos\alpha$	$\beta = 100^c - \alpha$ $a = c \cdot \cos\beta$ $b = c \cdot \text{sen}\,\beta$
2		Cateto *a* Angolo α	$\beta = 100^c - \alpha$ $b = a \cdot \text{cotg}\,\alpha$ $c = \dfrac{a}{\text{sen}\,\alpha}$	$\beta = 100^c - \alpha$ $b = a \cdot \text{tg}\,\beta$ $c = \dfrac{a}{\cos\beta}$
3		Ipotenusa *c* Cateto *a*	$\alpha = \text{arcsen}\,\dfrac{a}{c}$ $\beta = 100^c - \alpha$ $b = c \cdot \cos\alpha$	$\beta = \arccos\dfrac{a}{c}$ $\alpha = 100^c - \beta$ $b = c \cdot \text{sen}\,\beta$
4		Cateto *a* Cateto *b*	$\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{a}{b}$ $\beta = 100^c - \alpha$ $c = \dfrac{a}{\text{sen}\,\alpha}$	$\beta = \text{arctg}\,\dfrac{b}{a}$ $\alpha = 100^c - \beta$ $c = \dfrac{a}{\cos\beta}$

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un triangolo rettangolo ABC, retto in C, del quale si conosce la misura del cateto* $b = \overline{AC} = 136{,}95$ m *e l'angolo* $\alpha = 44°13'30''$.

Soluzione

$\alpha = 44°13'30'' = 44°{,}225$ (decimali)

$\beta = 90° - 44°{,}225 = 45°{,}775$

$c = \dfrac{136{,}95}{\text{sen}\ 45°{,}775} = 191{,}109$ m oppure: $c = \dfrac{136{,}95}{\cos 44°{,}225} = 191{,}109$ m

$a = 191{,}109\ \text{sen}\ 44°{,}225 = 133{,}294$ m oppure: $a = 191{,}109 \cos 45°{,}775 = 133{,}294$ m

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un triangolo rettangolo ABC, retto in C, del quale si conosce la misura del cateto* $a = \overline{CB} = 75{,}68$ m *e l'angolo* $\beta = 39^c{,}15$.

Soluzione

$\alpha = 100^c - 39^c{,}15 = 60^c{,}85$

$b = 75{,}68\ \text{tg}\ 39^c{,}15 = 53{,}455$ m oppure: $b = 75{,}68\ \text{cotg}\ 60^c{,}85 = 53{,}455$ m

$c = \dfrac{75{,}68}{\text{sen}\ 60^c{,}85} = 92{,}655$ m oppure: $c = \dfrac{53{,}455}{\cos 60^c{,}85} = 92{,}655$ m

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un triangolo rettangolo ABC, retto in C, del quale si conosce la misura del cateto* $b = \overline{AC} = 136{,}95$ m *e l'ipotenusa* $c = \overline{AB} = 191{,}11$ m.

Soluzione

$$\beta = \text{arcsen}\,\frac{136{,}95}{191{,}11} = 50^c{,}8608$$

$$\alpha = \text{arccos}\,\frac{136{,}95}{191{,}11} = 49^c{,}1392$$

Per controllo: $(50^c{,}8608 + 49^c{,}1392) = 100^c$

$a = 191{,}11 \cdot \text{sen}\, 49^c{,}1392 = 133{,}295$ m

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un triangolo rettangolo ABC, retto in C, del quale si conosce la misura del cateto* $a = \overline{CB} = 45{,}58$ m *e del cateto* $b = \overline{CA} = 28{,}11$ m.

Soluzione

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$ da cui: $\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{a}{b}$ quindi: $\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{45{,}58}{28{,}11} = 64^c{,}8190$

Nota. Nel caso dei triangoli rettangoli, **non serve** affatto ricercare le altre soluzioni che soddisfano l'equazione precedente, in quanto questi altri valori sono incompatibili con la geometria dei triangoli rettangoli. Quando risolveremo i **triangoli qualunque**, invece, non sempre potremo sfruttare tale semplificazione.

$\text{tg}\,\beta = \dfrac{b}{a}$ da cui: $\beta = \text{arctg}\,\dfrac{b}{a}$ quindi: $\beta = \text{arctg}\,\dfrac{28{,}11}{45{,}58} = 35^c{,}1810$

$c = \dfrac{45{,}58}{\text{sen}\, 64^c{,}819} = 53{,}55$ m oppure: $c = \dfrac{28{,}11}{\cos 64^c{,}819} = 53{,}55$ m

11. Formule goniometriche

Le funzioni goniometriche variano al variare dell'angolo α, ma **non variano proporzionalmente a esso**.

Ciò significa che, se il valore di un angolo diventa *doppio* o *triplo*, non è affatto vero che anche il valore delle corrispondenti funzioni goniometriche diventi anch'esso *doppio* o *triplo*. Consideriamo, per esempio, gli angoli 30° e 60°, il secondo doppio del primo (60° = 2 · 30°). Riferendoci alla funzione seno, si vede come i corrispondenti valori **non** risultano affatto uno il doppio dell'altro:

$$\text{sen}\, 30° = 0{,}5 \quad \text{e} \quad \text{sen}\, 60° = 0{,}86602, \quad \text{perciò sen}\, 2\alpha \neq 2\,\text{sen}\,\alpha$$

Peraltro, è anche molto semplice verificare che la funzione goniometrica della somma o della differenza di due angoli, non è affatto uguale alla somma o alla differenza delle funzioni goniometriche dei singoli angoli, cioè:

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) \neq \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta \quad \text{come anche tg}\,(\alpha - \beta) \neq \text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta$$

Di seguito vedremo alcune formule in grado di esprimere le funzioni goniometriche di **somme** e **differenze** di angoli, **prodotti** di un angolo per uno scalare, uti-

FAQ

► **Il coseno della somma di due angoli è uguale alla somma dei coseni di due angoli?**

No, il valore del coseno della somma di due angoli può essere ottenuto da apposite relazioni dette formule di addizione del coseno.

lizzando le funzioni goniometriche dei singoli angoli. Con l'uso delle calcolatrici, attualmente esse conservano interesse solo in ambito teorico e didattico per dimostrare alcuni enunciati.

Formule di addizione

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\\
&\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\\
&\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\\
&\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Formule di sottrazione

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\\
&\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\\
&\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\\
&\operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Formule di duplicazione

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sen}2\alpha=2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\\
&\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\\
&\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\\
&\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\cdot\operatorname{cotg}\alpha}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Formule di bisezione

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\\
&\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\\
&\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\\
&\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Formule di prostaferesi (con $\alpha > \beta$)

$$\begin{aligned}
\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta &= 2 \cdot \text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta &= 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2 \cdot \text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned} \tag{26}$$

12. Proiezione di un segmento e pendenza di una retta

Proponiamo ora due definizioni, utilizzando le precedenti funzioni goniometriche, che diverranno familiari allo studente durante l'intero corso.

Proiezione di un segmento

La **proiezione del segmento** AB, appartenente alla retta r-r, sulla retta s-s complanare con la prima, è il segmento $A'B'$ (▶FIGURA 18*a*), appartenente alla retta s-s e in cui A' e B' sono i **piedi delle perpendicolari** alla retta stessa passanti rispettivamente per A e B.

Per determinare il valore di tale proiezione, basta tracciare dal punto A una parallela AM alla retta s-s, indicando poi con α l'angolo che questa forma con la

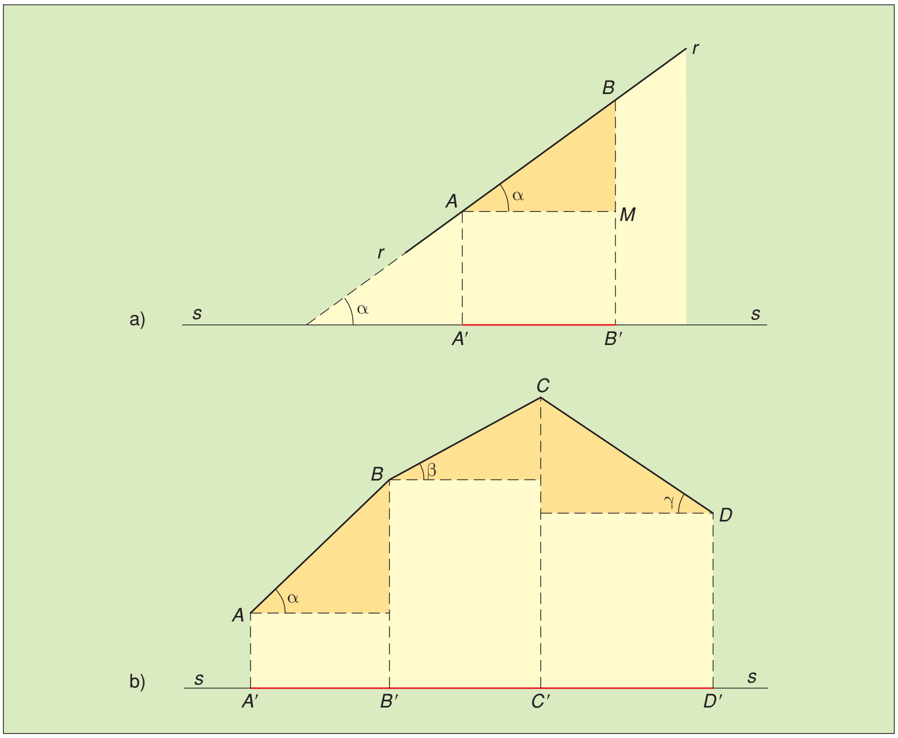


FIGURA 18 In alto, proiezione di un segmento *AB* su una retta. In basso, proiezione di una spezzata *ABCD* su una retta.

FAQ

► La pendenza di una retta può essere negativa?

Sì, se viene valutata nel senso della discesa.

retta *r-r*. Si viene a formare il triangolo rettangolo AMB retto in M; possiamo allora scrivere:

$$\overline{A'B'} = \overline{AM} = \overline{AB} \cdot \cos\alpha$$

Analogamente (►FIGURA 18*b*), per estensione di quanto detto sopra, la proiezione $A'B'C'D'$ della spezzata $ABCD$ sulla retta *s-s* è data dalla seguente relazione:

$$\overline{A'D'} = \overline{AB} \cdot \cos\alpha + \overline{BC} \cdot \cos\beta + \overline{CD} \cdot \cos\gamma$$

Pendenza di una retta

Facendo riferimento alla ►FIGURA 19, consideriamo la retta *r-r* nello spazio; essa forma un angolo α con il piano orizzontale π. Possiamo formulare il seguente enunciato:

si definisce **pendenza** della retta *r-r* la tangente dell'angolo α che la retta forma con il piano orizzontale.

Indicando con p tale entità, per definizione si ha:

$$p = \operatorname{tg}\alpha$$

Se consideriamo un punto A sulla retta *r-r*, il punto A' rappresenta la sua proiezione sul piano orizzontale π; indicando poi con O il punto di intersezione tra la retta e il piano, si viene a formare il triangolo rettangolo OAA' (retto in A').

Esprimendo la definizione di tangente nell'ambito di tale triangolo, e utilizzando le notazioni di ►FIGURA 19, potremo riscrivere l'espressione precedente nel seguente modo:

$$p = \frac{h}{d}$$

La pendenza di una retta, essendo definita dalla tangente di un angolo, è un **numero puro**; questo viene assunto **positivo** quando si considera il verso in salita della retta *r-r*, **negativo** quando si considera il verso in discesa.

Una retta orizzontale ha pendenza nulla perché $\operatorname{tg} 0^c = 0$; una retta inclinata di 50^c rispetto all'orizzontale ha una pendenza $p = 1$, perché $\operatorname{tg} 50^c = 1$, mentre la pendenza di una retta prossima alla verticale è infinitamente grande, perché $\operatorname{tg} 100^c = \infty$.

Nella pratica vengono considerate rette **poco inclinate** rispetto all'orizzontale, le cui pendenze risultano perciò *inferiori all'unità*. Pertanto, nel **linguaggio pratico**, si usa esprimere la pendenza in «per cento», così che, per esempio, una pendenza $p = 0{,}0558$ diventa $p = 5{,}58\%$.

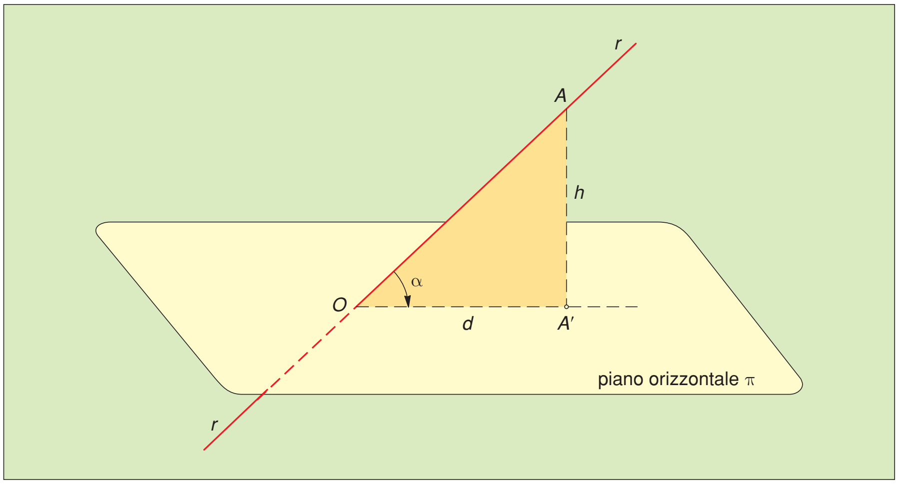
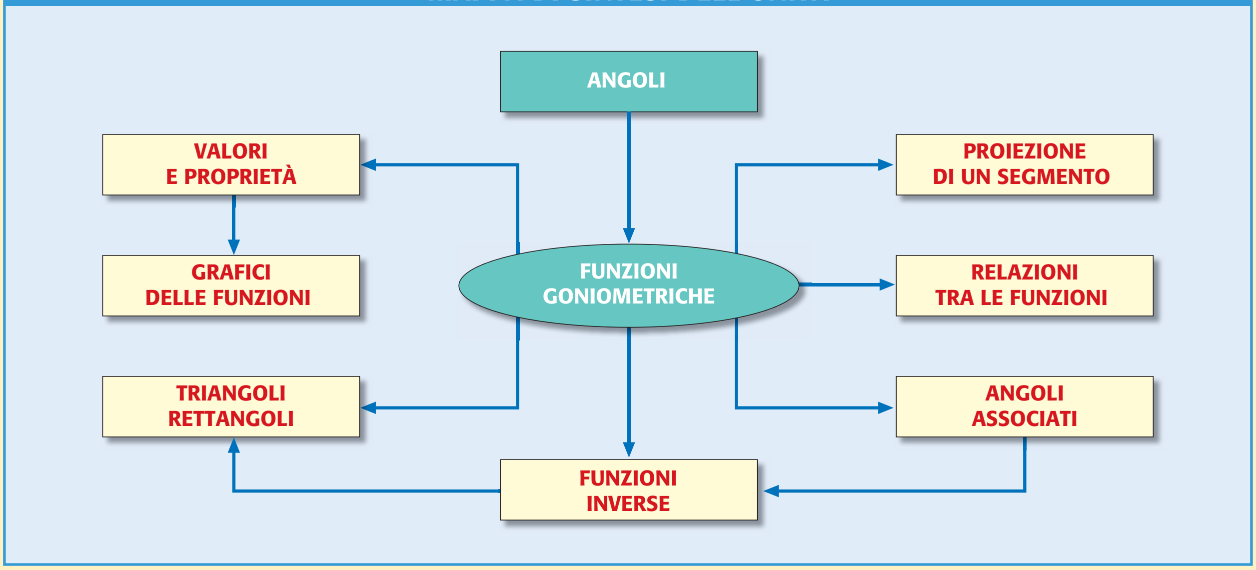


FIGURA 19 Pendenza di una retta.

Riassumendo

MAPPA DI SINTESI DELL'UNITÀ



Angolo orientato: è la parte di un piano individuata dalla rotazione attorno al vertice di una semiretta, scelta come origine, necessaria per realizzare la sovrapposizione di questa con la seconda semiretta.

- La rotazione viene convenzionalmente considerata *positiva* quando è oraria, *negativa* quando è antioraria, dando luogo rispettivamente ad ampiezze angolari positive e negative.
- L'angolo orientato elimina l'ambiguità connessa alla definizione geometrica di angolo.

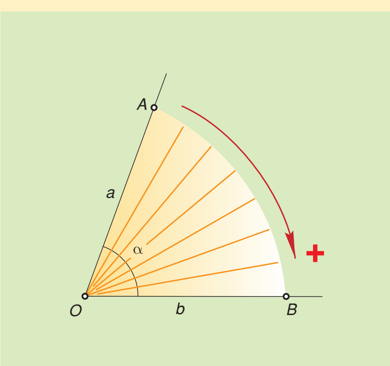
Radiante: è l'unità di misura degli angoli in ambito matematico; esso è definito come l'angolo al centro in una circonferenza di raggio arbitrario che sottende un arco di lunghezza uguale allo stesso raggio. In definitiva, indicando con l lo sviluppo dell'arco e con R il raggio della circonferenza, si ha:

$$\alpha^{\text{rad}} = \frac{l}{R}$$

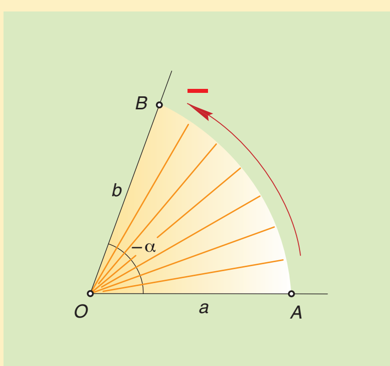
Relazione angolo-arco-radiante: dalla formula precedente derivano le seguenti espressioni:

$$R = \frac{l}{\alpha^{\text{rad}}} \qquad l = R \cdot \alpha^{\text{rad}}$$

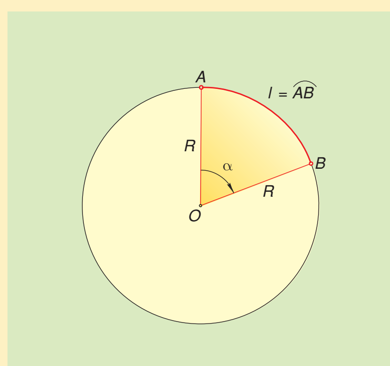
Sistemi di misura operativi: il radiante, come unità di misura degli angoli, rimane circoscritto all'ambito matematico e teorico. Nella pratica, cioè quando gli angoli vanno misurati concretamente, si definiscono altri sistemi di misura più convenienti e comodi nel contesto operativo: *sessagesimale*, *decimale*, *centesimale*.



Angolo $A\widehat{O}B$ positivo



Angolo $A\widehat{O}B$ negativo



Misura di un angolo in radianti

Conversione sessagesimale-decimale: entrambi i sistemi utilizzano come unità il grado sessagesimale, quindi la conversione riguarderà solo i sottomultipli.

- L'angolo sessagesimale $24°30'40''$ verrà convertito nel sistema decimale come segue:

$$24° + \frac{30'}{60} + \frac{40''}{3600} = 24°{,}5111$$

Conversione sessagesimale-radianti: occorre prima trasformare l'angolo sessagesimale nel sistema decimale, quindi applicare la seguente proporzione per ottenere il corrispondente valore in radianti:

$$\frac{\alpha°}{180°} = \frac{\alpha^{rad}}{\pi} \quad \text{da cui segue} \quad \alpha^{rad} = \alpha° \cdot \frac{\pi}{180°}$$

Conversione sessagesimale-centesimale: occorre prima trasformare l'angolo sessagesimale nel sistema decimale, quindi applicare la seguente proporzione per ottenere il corrispondente valore in gradi centesimali:

$$\frac{\alpha°}{180°} = \frac{\alpha^{c}}{200^{c}} \quad \text{da cui segue} \quad \alpha^{c} = \alpha° \cdot \frac{200^{c}}{180°}$$

Conversione centesimale-radianti: occorre applicare la seguente proporzione per ottenere il corrispondente valore in radianti:

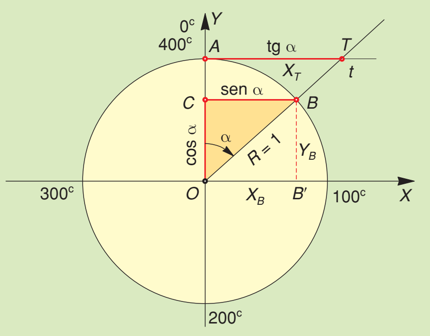
$$\frac{\alpha^{c}}{200^{c}} = \frac{\alpha^{rad}}{\pi} \quad \text{da cui segue} \quad \alpha^{rad} = \alpha^{c} \cdot \frac{\pi}{200^{c}}$$

Coefficienti di trasformazione: capita talvolta di dover trasformare un angolo piccolo (inferiore al grado, cioè all'unità di misura) da radianti direttamente in secondi.

- *Coefficiente per trasformare radianti in secondi sessagesimali:*

$$\alpha'' = \frac{180 \cdot 3600''}{\pi} \cdot \alpha^{rad} = 206\,265 \cdot \alpha^{rad}$$

Cerchio goniometrico: è un cerchio di raggio unitario ($R = 1$), avente il centro coincidente con l'origine di un sistema di riferimento cartesiano, il cui semiasse positivo delle ordinate viene assunto come *lato origine* per gli angoli.



- Il cerchio goniometrico non è indispensabile nella definizione delle funzioni goniometriche, tuttavia il suo impiego semplifica in modo significativo la trattazione.

Seno e coseno di un angolo: le funzioni seno e coseno dell'angolo α, indicate con sen α e cos α, sono definite dai seguenti rapporti:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} \qquad \cos\alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$$

- Questi rapporti rimangono invariati per qualunque valore del raggio R del cerchio adottato nella costruzione grafica.
- I valori delle funzioni sen α e cos α sono dei numeri puri, quindi senza dimensioni.
- Entrambe queste funzioni forniscono valori reali sempre compresi tra −1 e 1.
- Nell'*ambito del cerchio goniometrico* si ottiene una importante *semplificazione* perché, essendo $\overline{OB} = R = 1$, risulta:

$$\text{sen}\ \alpha = \overline{BC} \qquad \cos\alpha = \overline{OC}$$

Tangente e cotangente di un angolo: le funzioni tangente e cotangente dell'angolo α, indicate con tg α e cotg α, sono definite dai rapporti (quando esistono):

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} \qquad \text{cotg}\ \alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{BC}}$$

- Questi rapporti rimangono invariati per qualunque valore del raggio R del cerchio adottato nella costruzione grafica.
- I valori delle funzioni tg α e cotg α sono dei numeri puri, quindi senza dimensioni.
- Entrambe queste funzioni forniscono valori reali sempre compresi tra $-\infty$ e $+\infty$.

Le funzioni tangente e cotangente talvolta non esistono: a differenza delle funzioni sen α e cos α, le funzioni tg α e cotg α non sempre sono definite; in effetti esse presentano (nel primo angolo giro) i seguenti punti di indeterminazione:

– per $\alpha = 100^c$ e $\alpha = 300^c$ tg α non esiste;
– per $\alpha = 0^c$ e $\alpha = 200^c$ cotg α non esiste.

- Appena un po' prima e un po' dopo tali valori, le funzioni tg α e cotg α sono invece regolarmente definite e presentano valori molto grandi, positivi o negativi. Convenzionalmente si suole indicare in modo sintetico questa situazioni con le seguenti notazioni abituali, anche se non rigorose:

$$\text{tg}\ 100^c = \pm\infty \qquad \text{cotg}\ 0^c = \pm\infty$$

Variazione delle funzioni goniometriche: al variare del punto B, quindi dell'angolo α, le funzioni goniometriche cambiano il loro valore. In corrispondenza dei quattro punti di intersezione tra cerchio e sistema cartesiano le funzioni goniometriche presentano i seguenti valori:

$\alpha =$	**0°**	**100ᶜ**	**200ᶜ**	**300ᶜ**	**400ᶜ**
sen α	0	1	0	-1	0
cos α	1	0	-1	0	1
tg α	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
cotg α	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

Periodicità delle funzioni goniometriche: tutte le funzioni goniometriche sono periodiche, cioè i loro valori si ripetono a intervalli regolari detti *periodi*.

- Dopo un intero angolo giro le funzioni seno e coseno si ripetono periodicamente ripresentando gli stessi valori. Esse, pertanto, si dicono funzioni periodiche con ciclo 400^c o 2π.
- Dopo un angolo piatto le funzioni tangente e cotangente si ripetono periodicamente ripresentando gli stessi valori. Esse, pertanto, si dicono funzioni periodiche con ciclo 200^c o π.

Valori notevoli delle funzioni goniometriche: i valori delle funzioni goniometriche vengono generalmente calcolati con la calcolatrice. Tuttavia per alcuni angoli particolari (30°, 45° e 60°) esse assumono valori semplici e tali da essere ricordati:

$\alpha =$	**30°**	**45°**	**60°**
sen α	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos α	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tg α	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg α	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$

Prime relazioni tra le funzioni goniometriche: osservando le definizioni delle funzioni goniometriche, si possono formulare le seguenti importanti relazioni fondamentali tra le stesse funzioni:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha} \qquad \text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$$

Le funzioni inverse: permettono di individuare l'*angolo* α cui compete un dato valore di una certa funzione goniometrica. Tuttavia esiste un problema; in effetti, dato il valore di una funzione goniometrica, esistono *infiniti angoli* che per quella funzione corrispondono al valore assegnato (per esempio ci sono infiniti angoli il cui seno è 0,5). Fortunatamente, dopo aver individuato il *primo di questi valori*, è poi facile determinare tutti gli altri (o semplicemente l'altro, se ci si limita al primo angolo giro). A questo scopo sono definite le *funzioni inverse* in un intervallo sufficientemente ristretto, e tale da rendere *biunivoca* la corrispondenza tra angolo e funzione goniometrica. A seconda delle funzioni gli intervalli in cui sono definite le funzioni inverse sono:

$$\alpha = \text{arcoseno}\ r: \quad -100^c \leq \alpha \leq 100^c$$
$$\alpha = \text{arcocoseno}\ s: \quad 0^c \leq \alpha \leq 200^c$$
$$\alpha = \text{arcotangente}\ v: \quad -100^c \leq \alpha \leq 100^c$$

- Ciò significa che la funzione inversa arcoseno r restituirà sempre un valore compreso nell'intervallo $-100^c \leq \alpha \leq 100^c$. Questo deve essere inteso come *primo* degli infiniti angoli il cui seno è uguale a r. Gli altri valori devono essere determinati tenendo conto della periodicità della funzione seno e degli angoli associati. In modo analogo si procede per le altre funzioni inverse.

I triangoli rettangoli: la costruzione alla base della definizione di tutte le funzioni goniometriche si traduce sempre nella presenza di un *triangolo rettangolo*. Sicché possiamo utilizzare le definizioni delle funzioni goniometriche per risolvere i triangoli rettangoli, secondo i seguenti enunciati.

1. In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo acuto opposto a quel cateto.
2. In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo acuto adiacente a quel cateto.
3. In ogni triangolo rettangolo la misura dell'ipotenusa è uguale al rapporto tra un cateto e il seno dell'angolo acuto opposto a questo cateto; oppure è uguale al rapporto tra un cateto e il coseno dell'angolo acuto adiacente a questo cateto.
4. In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo acuto opposto al primo cateto.
5. In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo acuto adiacente al primo cateto.

Relazioni indipendenti: nell'ambito della goniometria è possibile tradurre il teorema di Pitagora; esso assume la seguente forma:

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Relazioni tra le funzioni goniometriche: combinando le relazioni indipendenti della goniometria, è possibile esprimere ciascuna funzione utilizzando le rimanenti:

	(sen α)	(cos α)	(tg α)
sen α =	sen α	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$
cos α =	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$	cos α	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$
tg α =	$\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	tg α

- Queste relazioni permettono di calcolare il valore di una funzione goniometrica di un angolo α quando si conosca il valore di una qualunque altra funzione dello stesso angolo.

Angoli associati: si definiscono angoli associati quegli angoli per i quali le funzioni goniometriche presentano lo stesso *valore assoluto*.

- I principali angoli associati sono:
  - α e il suo supplementare $(200^c - \alpha)$;
  - α e l'angolo che differisce di 200^c $(\alpha - 200^c)$;
  - α e il suo esplementare $(400^c - \alpha)$;
  - α e il suo opposto $(-\alpha)$.

Relazioni tra i segni delle funzioni di angoli associati: le relazioni tra le funzioni goniometriche di angoli associati permettono il calcolo delle funzioni di qualunque angolo maggiore di 100^c, riducendolo al calcolo di una funzione goniometrica relativa a un angolo appartenente al primo quadrante (riduzione al primo quadrante).

- In relazione alla presenza di un angolo α nel II, nel III o nel IV quadrante, le relazioni che permettono questo calcolo, sono le seguenti:

  Angolo α compreso nel II quadrante:
  $\text{sen}\,(200^c - \alpha) = \text{sen}\,\alpha \qquad \text{tg}\,(200^c - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$
  $\cos\,(200^c - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \text{cotg}\,(200^c - \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$

  Angolo α compreso nel III quadrante:
  $\text{sen}\,(\alpha - 200^c) = -\text{sen}\,\alpha \qquad \text{tg}\,(\alpha - 200^c) = \text{tg}\,\alpha$
  $\cos\,(\alpha - 200^c) = -\cos\alpha \qquad \text{cotg}\,(\alpha - 200^c) = \text{cotg}\,\alpha$

  Angolo α compreso nel IV quadrante:
  $\text{sen}\,(400^c - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha \qquad \text{tg}\,(400^c - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$
  $\cos\,(400^c - \alpha) = \cos\alpha \qquad \text{cotg}\,(400^c - \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$

  Angolo α negativo:
  $\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \qquad \text{tg}\,(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$
  $\cos\,(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \text{cotg}\,(-\alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$

Le formule goniometriche: talvolta è necessario esprimere una funzione goniometrica di una combinazione di angoli (per esempio $\alpha + \beta$ o 2α) con funzioni goniometriche dei singoli angoli.

- Formule di *addizione* (combinazione $\alpha + \beta$):

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$
$$\cos\,(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$
$$\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$$

- Formule di *sottrazione* (combinazione $\alpha - \beta$):

$$\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$
$$\cos\,(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$$
$$\text{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$$

- Formule di *duplicazione* (combinazione 2α):

$$\text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$
$$\text{tg}\,2\alpha = \frac{2 \cdot \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$$

- Formule di *bisezione* (combinazione $\alpha/2$):

$$\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

La proiezione di un segmento: se consideriamo un segmento AB che forma un angolo α con una retta r-r, la proiezione del segmento AB sulla retta r-r è costituita da un altro segmento $A'B'$.

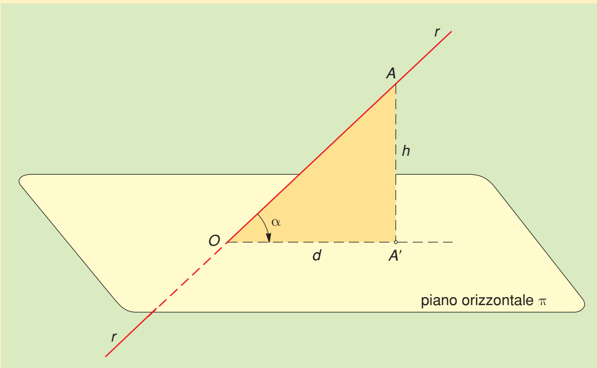
- Proiezione = $A'B' = AB \cdot \cos\alpha$

La pendenza di una retta: se consideriamo una retta che forma un angolo α rispetto a un *piano orizzontale*, si definisce pendenza di questa retta la tangente dell'angolo α:

$$p = \text{tg}\,\alpha$$

- Se consideriamo due punti A e O su questa retta e indichiamo rispettivamente con d e con h le lunghezze delle proiezioni di A e O prima sul piano orizzontale, poi su uno verticale, la pendenza della retta può essere così scritta:

$$p = \frac{h}{d}$$



LABORATORIO INFORMATICO

Excel

Calcolo e rappresentazione grafica delle funzioni seno e coseno

DI COSA CI OCCUPIAMO

L'esercitazione ha lo scopo di preparare un foglio elettronico predisposto per il calcolo dei valori delle funzioni seno e coseno per gli angoli compresi nel primo angolo giro con passo di 15° in 15°. Tali valori verranno poi utilizzati per costruire il grafico di entrambe le funzioni. Naturalmente la procedura potrà essere utilizzata allo stesso modo per diverse funzioni matematiche.

Supponiamo, dunque, di voler calcolare i valori e successivamente di tracciare la rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche **seno** e **coseno** nell'intervallo 0°-360°. Pensiamo poi di inserire le due rappresentazioni nello stesso diagramma, in modo da poterne apprezzare più facilmente le rispettive caratteristiche a confronto. Fissati così gli obiettivi da raggiungere con l'applicazione, analizziamo la procedura da attivare.

Il primo passo è quello di **progettare** e impostare il lavoro sul foglio; questa fase comprende:

- scelta dell'area del foglio su cui impostare il calcolo;
- definizione dei dati da trattare, cioè gli angoli dell'intervallo 0°-360°;
- formule da utilizzare nel calcolo dei valori delle funzioni;
- costruzione dei grafici.

1. Preparazione del foglio

Essenzialmente, imposteremo il foglio con la seguente struttura:

Aree del foglio	Destinazione
Riga 2	Titolo della tabella
Riga 4	Etichette di ricordo
Colonna A	Valori angolari da 0° a 360°
Colonne B e C	Valori delle funzioni seno e coseno

Lo schema del foglio è evidenziato nella ▶TABELLA 1. Possiamo ora entrare direttamente in ambiente Excel per modificare, adattandola alle nostre necessità, la struttura predefinita del foglio di calcolo.

• Note sulla barra multifunzione di Excel

Con la versione di Excel compresa nel pacchetto Microsoft Office System 2007, è stata introdotta, nella parte superiore dello schermo, la **barra multifunzione** (**ribbon**) che ha sostituito tutti i menu a tendina presenti nelle precedenti versioni del programma. Essa è composta da varie **schede** e contiene tutti i comandi e le configurazioni disponibili sotto forma di **icone** e di **finestre di dialogo**.

Nella barra multifunzione i comandi sono organizzati in **gruppi logici**, a loro volta raccolti nelle **schede**, il cui

TABELLA 1 **Schema funzionale del foglio di calcolo**

	A	B	C	D
1				
...	......	......	......	
4	**Angoli**	**Seno**	**Coseno**	
5	0	Formula per il calcolo del seno di 0	Formula per il calcolo del coseno di 0	
6	15	Formula per il calcolo del seno di 15	Formula per il calcolo del coseno di 15	
7	30	Formula per il calcolo del seno di 30	Formula per il calcolo del coseno di 30	
8	45	Formula per il calcolo del seno di 45	Formula per il calcolo del coseno di 45	
9	60	Formula per il calcolo del seno di 60	Formula per il calcolo del coseno di 60	
...	......	......	......	
...	......	......	......	

nome è visibile nella parte superiore della barra (▶FIGURA A).

Per ottimizzare lo spazio disponibile, alcune schede vengono visualizzate solo quando vengono attivate determinate funzioni. La prima scheda è denominata **Home**; essa è sempre collocata a sinistra sullo schermo e contiene i seguenti **gruppi logici** di comandi: **Appunti**, **Carattere**, **Allineamento**, **Numeri**, **Stili**, **Celle**, **Modifica**. Nella ▶FIGURA A sono stati cerchiati la linguetta della scheda **Home** e il suo gruppo **Numeri**.

- **Larghezza delle colonne utilizzate**

Come prima operazione, ci proponiamo di modificare la **larghezza** di tutte le celle appartenenti alle colonne A, B e C che utilizzeremo nel calcolo, con la seguente procedura (▶FIGURA A):

- **selezionare** direttamente le tre colonne A, B e C, premendo con il puntatore del mouse sui bottoni in cima alle colonne stesse, con l'accorgimento di tenere premuto, durante l'operazione, il tasto **Ctrl** (posto in basso e alla sinistra della tastiera); dopo l'operazione le tre colonne cambieranno colore;
- premere sul pulsante **Formato** nel gruppo **Celle** (scheda **Home**) per fare scendere la tendina contenente i comandi di formattazione delle celle;
- selezionare il comando **Larghezza colonne...** (i tre puntini di sospensione preannunciano la successiva apertura di una finestra di dialogo);
- nella **finestra di dialogo** che appare sostituire il valore che appare (8,43) con il valore 10; immediatamente le celle delle tre colonne assumeranno il nuovo valore per la loro larghezza.

Seguendo lo schema della ▶TABELLA 1, si riservano la riga 2 all'inserimento del **titolo** del foglio e la riga 4 all'inserimento delle **etichette di testo**, con le indicazioni del contenuto delle rispettive colonne. Potremmo allora inserire direttamente il testo ANGOLI nella cella A4 (dopo averla selezionata puntandola con il puntatore e premendo il tasto sinistro del mouse), il testo SENO in B4 e COSENO in C4.

- **Formato numerico delle celle**

Prima di procedere con la creazione del foglio elettronico è necessario modificare il formato predefinito delle celle destinate a contenere i dati del calcolo. In effetti la colonna A, quella che conterrà gli **angoli**, dovrà essere predisposta per *numeri interi* (cioè 0 cifre decimali), mentre le colonne B e C, che dovranno contenere i valori delle funzioni **seno** e **coseno**, dovranno visualizzare i valori con almeno 7 cifre decimali, necessari per approssimare il calcolo in modo adeguato.

Per apportare queste modifiche è necessario:

- **selezionare** la colonna A (come visto al punto precedente) e premere sulla **piccola freccia** in basso a destra del riquadro del gruppo **Numeri** (evidenziata in ▶FIGURA A). Nella finestra di dialogo che appare, selezionare la voce **Numeri** della lista **Categoria** alla sinistra della finestra, e inserire 0 nella casella **Posizioni decimali**;
- **selezionare** le colonne B e C e ripetere l'operazione sopra descritta, inserendo 7 nella casella **Posizioni decimali**.

2. I dati da trattare: gli angoli

I dati del nostro calcolo sono gli angoli dell'intervallo 0°-360°, con un **passo** di 15° in 15°, giudicato appropriato allo scopo di fornire un grafico sufficientemente preciso; questi valori troveranno posto nella colonna A a partire dalla cella A5 (▶TABELLA 1). Tuttavia è necessario subito ricordare che Excel richiede, per il calcolo dei valori delle funzioni goniometriche, un angolo espresso in **radianti**. È pertanto necessario, prima di far eseguire il calcolo del valore del-

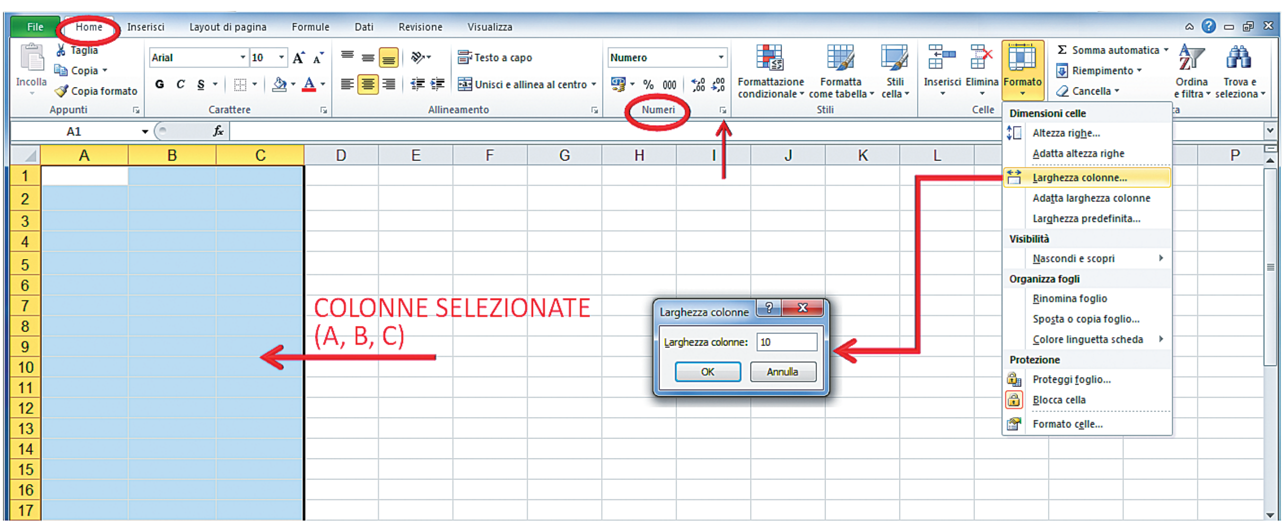


FIGURA A La *barra multifunzione* di Excel; essa raccoglie tutti i comandi organizzati in *schede*. Nella figura si utilizza il comando **Formato** del gruppo **Celle** per dimensionare la larghezza delle colonne selezionate A, B, C.

LABORATORIO INFORMATICO

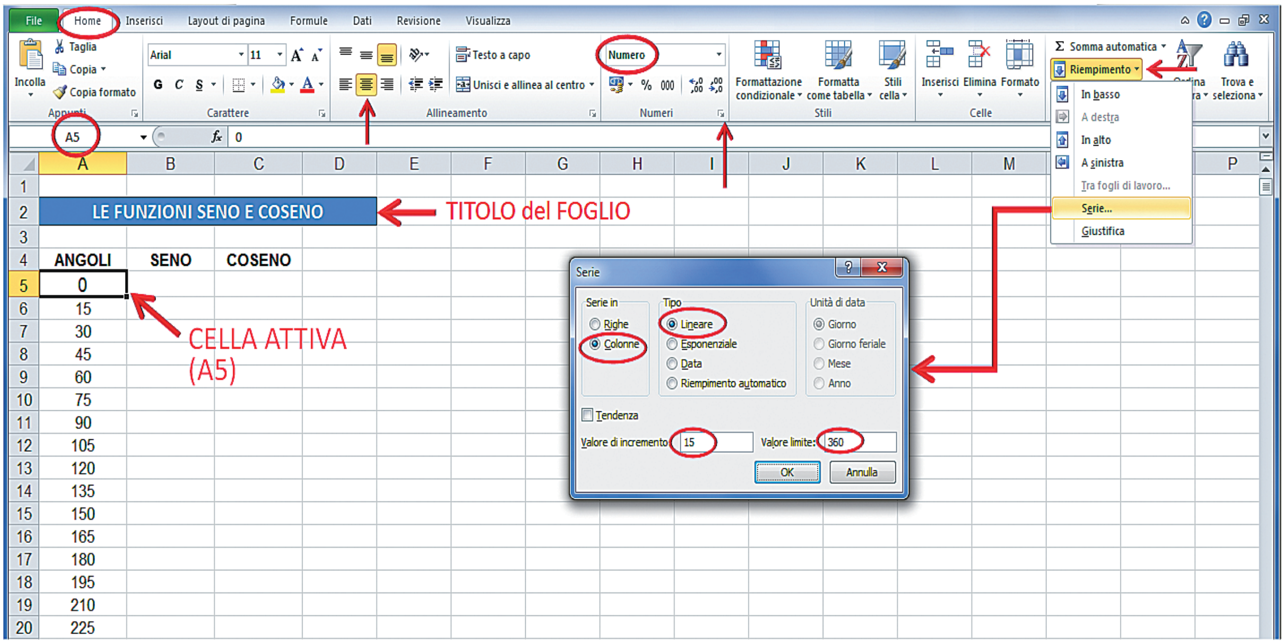


FIGURA B Generazione automatica dei valori degli angoli dell'intervallo 0°-360° con il comando **Riempimento-Serie**.

la funzione, provvedere a trasformare gli angoli dai *gradi sessagesimali*, che noi utilizzeremo come dati di partenza, ai *radianti*. Per questo Excel possiede la funzione RADIANTI( ), ma lo stesso risultato si otterrebbe utilizzando il coefficiente di trasformazione $\pi/180$.

Dunque, possiamo ora rendere attiva la cella A5 per introdurvi il valore 0 come primo valore angolare dell'intervallo 0°-360°. Successivamente dovrebbero essere introdotti manualmente, nelle celle sottostanti della colonna A (A6, A7, ...), gli altri angoli con passo 15° fino a 360°.

Tuttavia, ciò sarebbe noioso e, fortunatamente, non necessario. In realtà esiste un modo più semplice e rapido per creare **automaticamente** questo insieme di dati, con la seguente procedura:

- mantenere la A5 (in cui si è introdotto il valore 0) come **cella attiva**;
- premere sul pulsante **Riempimento** del gruppo **Modifica** (sul lato destro della scheda **Home**) per far scendere la tendina con i comandi disponibili;
- selezionare il comando **Serie...**;
- nella finestra di dialogo che appare, effettuare le scelte evidenziate con cerchi in ▶FIGURA **B**.

Una volta confermati con il pulsante **OK** i valori e le opzioni, si osserverà immediatamente il riempimento automatico delle celle sottostanti la cella di partenza (A5) con i valori angolari aumentati di 15° in 15° fino a 360°.

3. Calcolo dei valori delle funzioni seno e coseno

Ora portiamo il cursore nella cella B5, e successivamente in quella adiacente C5. In queste due celle si dovranno scrivere le formule, peraltro ovvie, che permettono il calcolo dei valori delle funzioni seno e coseno dell'angolo contenuto nella cella A5 della stessa riga (riga 5). Ricordando che occorre trasformare i valori angolari in **radianti**, potremo scrivere le seguenti formule:

Calcolo dei valori di seno e coseno

Formula	Cella e descrizione
= SEN(RADIANTI(A5))	In B5 per calcolare il valore del seno dell'angolo contenuto in A5
= COS(RADIANTI(A5))	In C5 per calcolare il valore del coseno dell'angolo contenuto in A5

Una volta introdotte le formule precedenti nelle celle B5 e C5 appariranno immediatamente i valori delle funzioni seno e coseno a 0°, rispettivamente 0 e 1 (▶FIGURA **C**).

Osserviamo che le formule contengono come *argomento* un **riferimento relativo** alla cella A5 (in effetti manca il prefisso $). Questo tipo di riferimento deve essere letto nel senso che ci si riferisce al valore contenuto **nella cella della colonna A e sulla stessa riga** (la riga 5) **che contiene le formule**. Questa osservazione è molto importante per le successive operazioni di copiatura.

Il passaggio successivo potrebbe essere quello di riscrivere manualmente le stesse formule precedenti nelle celle D6 e C6, con l'avvertenza di modificare il riferimento alla cella A5 con quello alla cella A6 (calcolo di seno e coseno a 15°), ripetendo poi l'operazione fino alla riga che contiene

LABORATORIO INFORMATICO

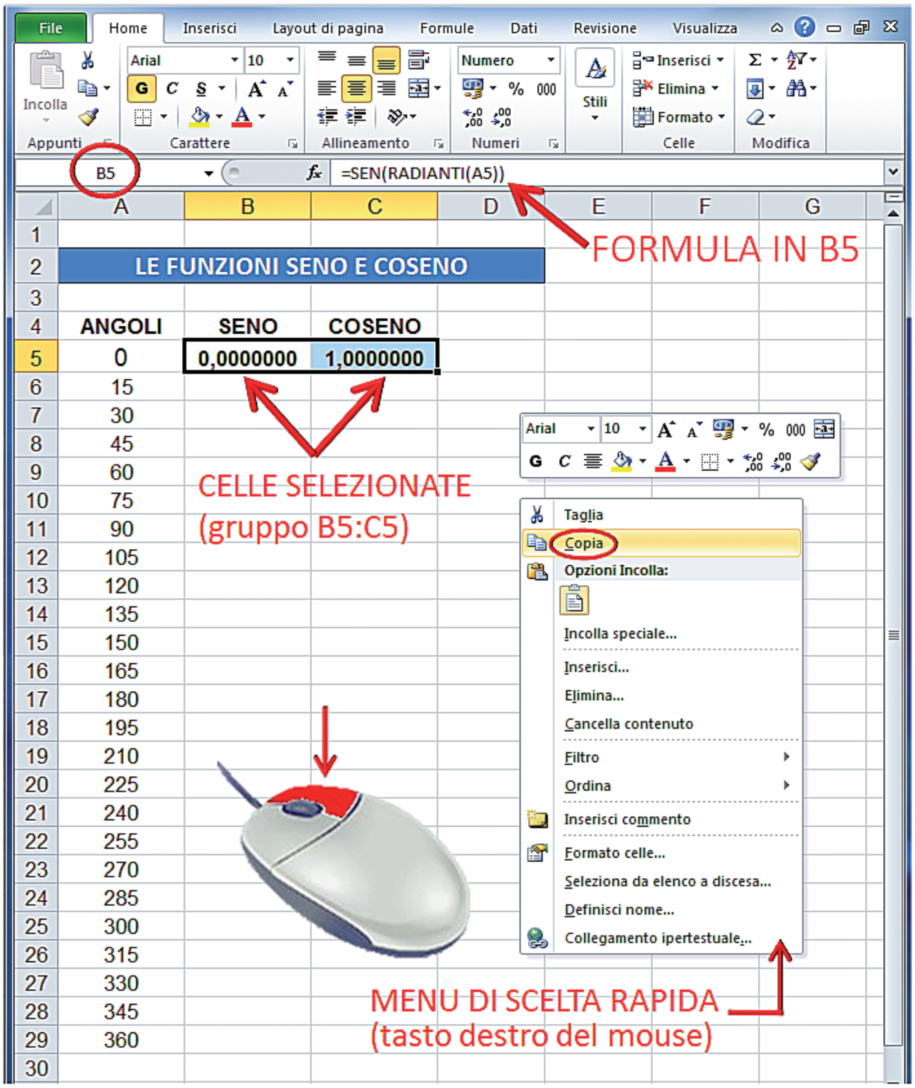


FIGURA C Menu di scelta rapida (detto anche contestuale) attivabile dal tasto destro del mouse.

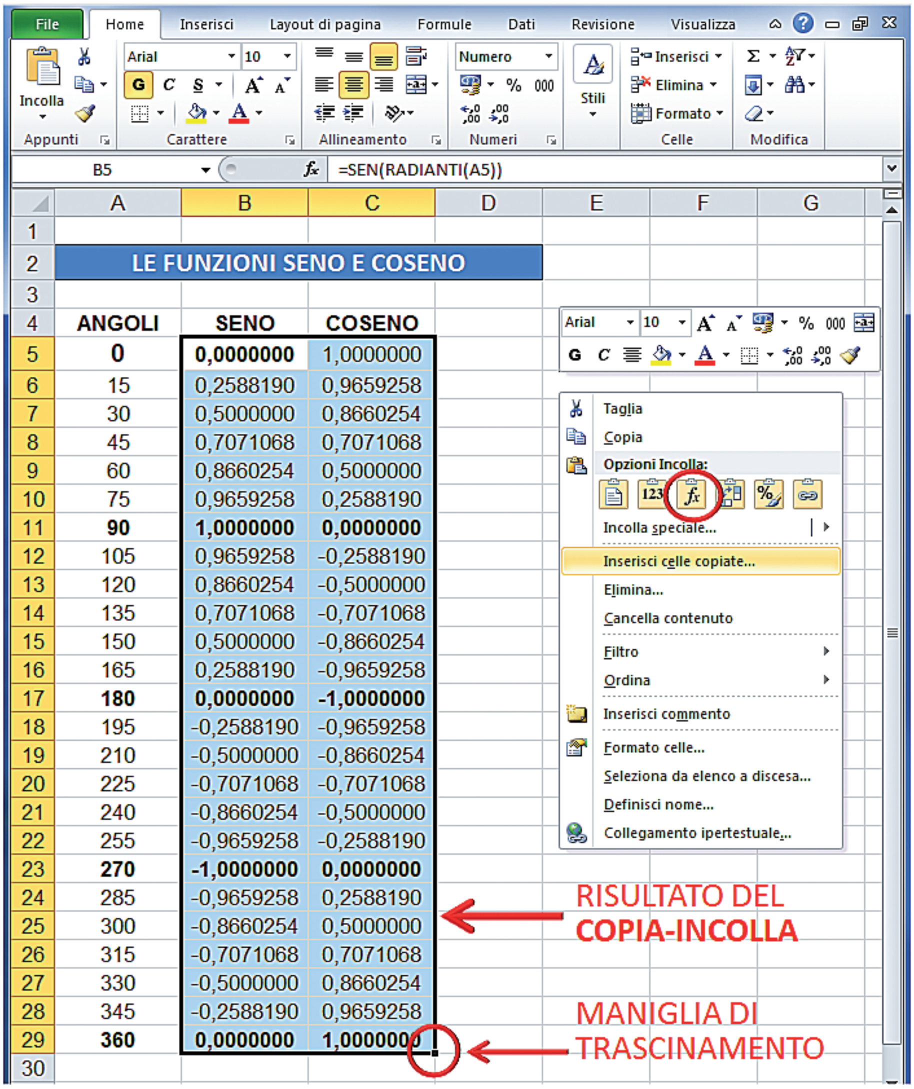
il valore finale dell'intervallo angolare a cui si fa riferimento. Tuttavia anche in questo caso Excel ci mette a disposizione gli strumenti per eseguire questa operazione in modo più semplice e rapido con la seguente procedura:

- **selezionare** entrambe le celle B5 e C5 (puntandole tenendo premuto il tasto **shift/maiuscole**) contenenti le formule da copiare, che poi presenteranno un unico bordo nero e spesso;
- con il cursore del mouse posizionato all'interno di una delle due celle appena selezionate, si preme il **tasto destro** del mouse; immediatamente appare lateralmente un menu denominato di **scelta rapida** (▶FIGURA C);
- selezionare la voce **Copia** (vengono poste negli **Appunti** le precedenti formule in B5 e C5);
- selezionare il **blocco rettangolare** di celle comprese tra la B6 e la C29 (prima puntare sulla B6, poi, tenendo premuto il tasto **shift/maiuscole** , sulla C29);
- posizionando il cursore del mouse all'interno dell'area appena selezionata, si torna a premere il **tasto destro** dello stesso mouse per fare ricomparire il menu di **scelta rapida**;
- selezionare l'icona **Incolla Formule** presente nella voce **Opzioni Incolla** del menu contestuale.

Si noterà immediatamente che le celle selezionate saranno riempite con i valori delle funzioni seno e coseno relativi agli angoli contenuti in corrispondenza della prima cella di ciascuna riga (▶FIGURA D).

L'operazione precedente poteva essere eseguita ancora più rapidamente utilizzando la **maniglia di trascinamento** (▶FIGURA D) costituita da un piccolo quadratino nero posto nell'angolo in basso a destra sul bordo dell'area selezionata. In effetti, dopo avere **selezionato** le celle B5 e C5 (primo punto precedente), basta selezionare questa **maniglia** e, tenendo premuto il **tasto sinistro** del mouse, **trascinare** verso il basso questa maniglia fino alla **riga 29**; rilasciando il tasto si ottiene lo stesso risultato.

LABORATORIO INFORMATICO



ANGOLI	SENO	COSENO
0	0,0000000	1,0000000
15	0,2588190	0,9659258
30	0,5000000	0,8660254
45	0,7071068	0,7071068
60	0,8660254	0,5000000
75	0,9659258	0,2588190
90	1,0000000	0,0000000
105	0,9659258	-0,2588190
120	0,8660254	-0,5000000
135	0,7071068	-0,7071068
150	0,5000000	-0,8660254
165	0,2588190	-0,9659258
180	0,0000000	-1,0000000
195	-0,2588190	-0,9659258
210	-0,5000000	-0,8660254
225	-0,7071068	-0,7071068
240	-0,8660254	-0,5000000
255	-0,9659258	-0,2588190
270	-1,0000000	0,0000000
285	-0,9659258	0,2588190
300	-0,8660254	0,5000000
315	-0,7071068	0,7071068
330	-0,5000000	0,8660254
345	-0,2588190	0,9659258
360	0,0000000	1,0000000

FIGURA D Copiatura delle formule contenenti *riferimenti relativi* che si adattano automaticamente alle celle di destinazione.

Con l'operazione precedente sono state **copiate**, nelle celle sottostanti selezionate, le formule contenute nelle celle B5 e C5. Posizionando poi il cursore su una qualunque di queste celle, per esempio la **B21**, sulla riga delle immissioni si osserverà la formula copiata, nella quale il **riferimento relativo** da A5 è stato automaticamente trasformato in A21, e così per tutte le altre celle.

4. Costruzione del grafico

Per completare il lavoro non ci resta che creare un **diagramma** che contenga la rappresentazione grafica delle funzioni *seno* e *coseno*. Excel è particolarmente attrezzato per realizzare grafici di tipo **statistico**, tuttavia è anche possibile ottenere grafici di funzioni matematiche.

Nel nostro caso è possibile creare due grafici separati (uno per ciascuna funzione), oppure un solo grafico contenente gli andamenti di entrambe le funzioni distinte da due colori diversi; noi proporremo questa seconda soluzione.

Per semplificare la creazione del grafico, è opportuno (in questo ambito) preliminarmente **selezionare i dati** che devono essere rappresentati nel grafico (valori delle funzioni seno e coseno); nel nostro caso essi sono contenuti nel blocco rettangolare di celle appartenenti alle due colonne B e C comprese tra la riga 5 e la riga 29 (blocco **B5:C29**).

Successivamente si apre la scheda **Inserisci** (▶FIGURA E), premendo sulla relativa **linguetta** nella barra multifunzione, nella quale appare subito il gruppo **Grafici**. Tra i pulsanti disponibili in questo gruppo per la *creazioni dei grafici* occorre selezionare quello denominato **Grafico a linee**; esso apre una tendina con la possibilità di scegliere, tra diversi tipi di *grafici a linee*, quello desiderato. Nel nostro caso è opportuno scegliere il **primo** tipo di grafico compreso nel riquadro **Linee 2D**.

LABORATORIO INFORMATICO

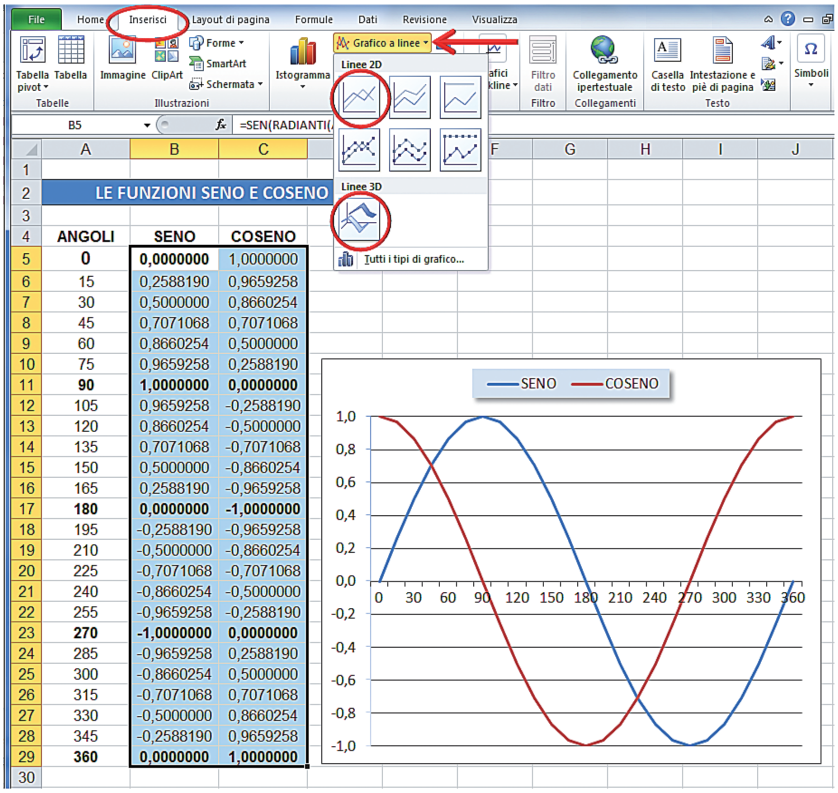


FIGURA E Grafico delle funzioni seno e coseno realizzato con **Linee 2D**.

Immediatamente il grafico viene creato in un riquadro (finestra) **scalabile** e spostabile a piacere. Gli elementi accessori al grafico (*titolo*, *legenda*, *griglia*, *assi e relative etichette*, *colori*, *sfondi* e altri parametri) andranno **personalizzati** a piacere. Per questa operazione basta portare il puntatore del mouse sull'elemento da personalizzare e premere il tasto destro del mouse. Come sempre apparirà il **menu di scelta rapida** da cui è possibile selezionare l'ultimo comando, denominato **Formato**, seguito dal **nome** dell'elemento selezionato (per esempio **Formato legenda**, **Formato asse**, **Formato griglia** ecc.). Seguono alcune finestre di dialogo con le quali, in modo intuitivo e interattivo, è possibile operare numerosissime personalizzazioni.

Naturalmente si possono scegliere anche altri **tipi** di grafico, con diversi **formati**, se questi verranno giudicati più efficaci nella rappresentazione grafica. Per esempio, nel nostro caso, potremmo scegliere come tipo di grafico quello denominato **Linee 3D** (▶FIGURA **E**), il cui risultato è illustrato in ▶FIGURA **F**.

Infine, si può poi ricorrere all'uso dei colori, per evidenziare gruppi di dati omogenei (nel nostro caso i valori delle funzioni seno e coseno), e inserire un titolo nel foglio di calcolo, per il quale sono state riservate le prime tre righe, opportunamente lasciate vuote all'inizio della procedura.

Il foglio di calcolo così impostato può essere utilizzato per rappresentare graficamente **altri tipi di funzioni goniometriche**, anche complesse, ma nello stesso intervallo. Allo scopo basta sostituire nelle colonne B e C le formule prima illustrate con quelle relative alle nuove funzioni. Suggeriamo per esercizio di rappresentare nel modo indicato le seguenti funzioni:

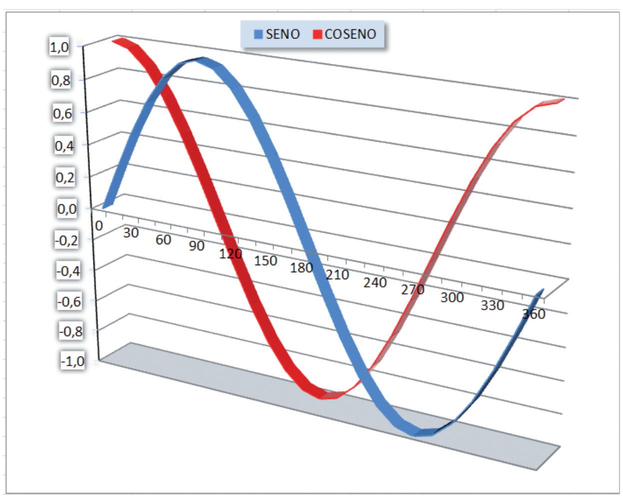


FIGURA F Grafico tridimensionale delle funzioni seno e coseno realizzato con **Linee 3D**.

$y = |\text{sen}\ \alpha|$ $\qquad$ $y = \text{sen}\ \alpha + \cos \alpha$

$y = 1 + \text{sen}\ \alpha$ $\qquad$ $y = |\cos \alpha| + 1$

$y = -\text{sen}\ \alpha$ $\qquad$ $y = \text{sen}\ 2\alpha$

$y = 2 \cos(\alpha/2)$ $\qquad$ $y = \cos(\alpha - 100^c)$

Autovalutazione

A. Verifica delle conoscenze

QUESITI VERO/FALSO

Valutare senza l'uso della calcolatrice.

V F

1 La definizione geometrica classica di angolo prevede valori negativi ☐ ☐

2 La definizione di angolo orientato prevede valori maggiori dell'angolo giro ☐ ☐

3 Il radiante è una parte geometrica dei cerchi ☐ ☐

4 L'angolo $\alpha = 3/2\,\pi$ e quello $\beta = 300^c$ hanno la stessa ampiezza ☐ ☐

5 La misura in radianti dell'angolo di ampiezza $220°$ è di $5/6\,\pi$ ☐ ☐

6 La trasformazione di un angolo nei vari sistemi di misura non è sempre possibile ☐ ☐

7 Gli angoli $\alpha = 41°{,}5000$ e $\beta = 41°30'00''$ hanno la stessa ampiezza ☐ ☐

8 Il rapporto $\pi/200$ serve a trasformare radianti in gradi centesimali ☐ ☐

9 L'angolo $\alpha = 0°4'12''$ e l'angolo $\beta = 252''$ si equivalgono ☐ ☐

10 Il sistema centesimale è quello più utilizzato in topografia ☐ ☐

11 La somma tra due angoli è sempre ammissibile ☐ ☐

12 Il prodotto tra due angoli è sempre ammissibile ☐ ☐

13 La divisione di un angolo con uno scalare è sempre ammissibile ☐ ☐

14 Le notazioni convenzionali *ASB* e *BSA* indicano lo stesso angolo orientato ☐ ☐

15 L'angolo orientato $\alpha = 310^c$ e l'angolo $\alpha = -90^c$ si equivalgono ☐ ☐

16 $|\text{sen}\,\alpha| \leq 1$ ☐ ☐

17 $|\text{cotg}\,\alpha| \leq 1$ ☐ ☐

18 Esiste un angolo α tale che $\text{sen}\,\alpha = 1/2$ e $\cos\alpha = 1/2$ ☐ ☐

19 La funzione cotangente è periodica di periodo π ☐ ☐

20 La funzione coseno è periodica di periodo 4π ☐ ☐

21 $\text{sen}\,1° > \cos 1°$ ☐ ☐

22 $\dfrac{a \cdot \cos 90° - b \cdot \text{sen}\,180°}{a \cdot \cos 180° - \cos 90°} = 0$ (con $a \neq 0$) ☐ ☐

23 $\dfrac{4 \cdot \text{sen}\,(3/2)\pi + \cos\pi - 3 \cdot \text{tg}\,9\pi}{3 \cdot \cos(\pi/2) - 2 \cdot \text{sen}\,(-\pi/2)} = \dfrac{5}{2}$ ☐ ☐

24 $\dfrac{3 \cdot \text{sen}\,90° - \text{sen}\,270° + 5 \cdot \text{tg}\,360}{2 \cdot \text{tg}\,180° + 3 \cdot \cos(-360°)} = \dfrac{4}{3}$ ☐ ☐

25 $\cos 220° = \sqrt{\cos^2 220°}$ ☐ ☐

26 $-\text{tg}\,160° = \sqrt{\text{tg}^2\,160°}$ ☐ ☐

27 $3 \cdot |\cos\alpha| = \sqrt{9 \cdot \cos^2\alpha}$ ☐ ☐

28 $2\,\text{sen}\,\alpha = \sqrt{4 \cdot \text{sen}^2\,\alpha}$ ☐ ☐

29 $\text{tg}\,60° \cdot \text{tg}\,30° = 1$ ☐ ☐

30 $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$ per qualunque angolo α ☐ ☐

Considerando il triangolo rettangolo *ABC*, retto in *C*, indicando i cateti con *a* e *b*, con *c* l'ipotenusa e con *m* e *n* le proiezioni rispettivamente di *b* ed *a* sull'ipotenusa, valutare le seguenti espressioni:

31 $a = b \cdot \text{tg}\,\alpha$ ☐ ☐

32 $c = b \cdot \text{sen}\,\beta$ ☐ ☐

33 $\dfrac{a}{c} = \text{sen}\,\beta$ ☐ ☐

AUTOVALUTAZIONE

34 $\frac{b}{c} = \text{sen}\,\beta$ ☐ ☐

35 $\frac{a}{\cos\beta} = c$ ☐ ☐

36 $m = b \cdot \cos\beta$ ☐ ☐

37 $\frac{n}{\cos\beta} = a$ ☐ ☐

38 $c = b \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\beta$ ☐ ☐

Valutare senza l'uso della calcolatrice.

39 $\frac{1}{\cos 218°} = \sqrt{1 + \text{tg}^2\, 218°}$ ☐ ☐

40 $\frac{\text{tg}\, 211°}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\, 211°}} = \text{sen}\, 211°$ ☐ ☐

41 Per $0° < \alpha < 180°$ si ha:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{tg}\,\alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}}$ ☐ ☐

42 Per $90° < \alpha < 270°$ si ha:

$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}}$ ☐ ☐

43 Per $90° < \alpha < 180°$ si ha:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{tg}\,\alpha}{-\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}}$ ☐ ☐

44 Per $270° < \alpha < 360°$ si ha:

$\text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ ☐ ☐

45 Per $180° < \alpha < 270°$ si ha:

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}$ ☐ ☐

46 Sapendo che $\text{sen}\,\alpha = 4/5$ con $0° < \alpha < 90°$, allora $\text{tg}\,\alpha = 4/3$ ☐ ☐

47 Sapendo che $\cos\alpha = 5/4$, allora $\text{sen}\,\alpha = 4/3$ ☐ ☐

48 Se per $\alpha < 180°$ si ha:

$\text{tg}\,\frac{\alpha}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, allora $\alpha = 60°$ ☐ ☐

49 Se per $\alpha < 180°$ si ha:

$\frac{\text{tg}\,\alpha}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, allora $\alpha = 60°$ ☐ ☐

50 $\text{tg}\,\alpha = 6$ è una relazione impossibile ☐ ☐

51 $\cos\alpha = -2$ è una relazione impossibile ☐ ☐

52 $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 2$ è una relazione impossibile ☐ ☐

53 $\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha = 1$ è una relazione impossibile ☐ ☐

54 $\cos^2\alpha = 3/2$ è una relazione impossibile ☐ ☐

55 È possibile che α e β siano gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sapendo che $\text{sen}\,\alpha = 1$ e $\cos\beta = -1/2$ ☐ ☐

56 $\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha$ ☐ ☐

57 Se $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ allora $\cos 2\alpha = \frac{4}{5}$ ☐ ☐

58 Se $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ allora $\cos 2\alpha = \frac{1}{9}$ ☐ ☐

59 Se $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$ e $\text{sen}\,\beta = \frac{1}{2}$

allora $\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ☐ ☐

60 Se $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ allora $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ ☐ ☐

61 Se $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ allora $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ☐ ☐

QUESITI A RISPOSTA SINGOLA

62 Enunciare la definizione di seno di un angolo.

63 Enunciare la definizione di tangente di un angolo.

64 Sapendo che $\cos\alpha < 0$ in quali quadranti si trova α?

65 Se $450° < \alpha < 540°$, qual è il segno di $\cos\alpha$?

66 Perché si può affermare che il seno e il coseno sono funzioni dell'angolo α?

67 Che cosa s'intende dicendo che la funzione tangente è periodica? Qual è il suo periodo?

68 Per quali valori di α si ha $\operatorname{tg} \alpha = 0$?

69 Cosa si può dedurre sapendo che $\operatorname{cotg} \alpha > 0$?

70 Quale situazione consente di risolvere i triangoli rettangoli calcolandone ogni elemento?

71 In quale quadrante tutte le funzioni goniometriche assumono valori negativi?

72 Quale relazione intercorre tra tangente e cotangente di uno stesso angolo?

73 Quali funzioni goniometriche è possibile definire con i due cateti di un triangolo rettangolo?

74 Quali funzioni goniometriche è possibile definire con un cateto e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo?

75 Come si deve limitare l'angolo α per rendere biunivoca (invertibile) la funzione $y = \operatorname{sen} \alpha$?

76 Che cosa indica la scrittura $y = \operatorname{arcsen} \alpha$. Qual è il dominio e il codominio di questa funzione?

77 Come si indica la funzione inversa di $y = \cos \alpha$ e quali valori deve assumere α affinché essa diventi biunivoca?

78 Indicare il dominio e il codominio della funzione $y = \operatorname{arctg} \alpha$.

79 Che cosa si intende per angoli associati a un determinato angolo α?

80 Come si può giustificare la relazione $\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)$?

81 Sapendo che α e β sono due angoli supplementari, come si giustifica: $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$?

82 Che relazioni legano le funzioni seno e coseno dei due angoli opposti α e $-\alpha$?

83 Per quale ragione le funzioni goniometriche sono biunivoche (invertibili) solo in determinati intervalli? E quali sono questi intervalli per ciascuna funzione?

84 Trascrivere la formula di addizione del seno e quella di sottrazione del coseno.

85 Trascrivere le formule di duplicazione di seno e coseno.

86 Trascrivere la formula di bisezione della tangente.

87 Che cosa si intende per proiezione di un segmento su una retta?

88 Come viene definita la pendenza di una retta?

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

89 Le ampiezze dei tre angoli interni di un triangolo equilatero valgono

a $\pi/2$ b $\pi/4$
c $\pi/3$ d $\pi/6$

90 Se in un triangolo isoscele l'angolo compreso tra i lati uguali è di $\pi/4$, le ampiezze di ciascuno degli angoli uguali valgono

a $3/2\,\pi$ b $3/4\,\pi$
c $3/5\,\pi$ d nessuno dei precedenti

91 L'angolo $\alpha = 1^{rad},2436$ espresso in gradi centesimali vale

a $59^c,2245$ b $69^c,0055$
c $79^c,1700$ d $97^c,1177$

92 L'angolo $\alpha = 1^{rad},2436$ espresso in gradi sessagesimali vale

a $87°12'15''$ b $71°14'71''$
c $68°41'25''$ d nessuno dei precedenti

93 L'angolo $\alpha = 215^c,2938$ espresso in gradi sessagesimali vale

a $199°02'24''$ b $235°18'21''$
c $193°45'52''$ d nessuno dei precedenti

94 L'angolo $\alpha = 124°42'16''$ espresso in gradi centesimali vale

a $159^c,2436$ b $142^c,2287$
c $135^c,3800$ d $138^c,5605$

95 L'angolo $\alpha = 85°47'26''$ espresso in radianti vale

a $1^{rad},4973$ b $1^{rad},2247$
c $1^{rad},0351$ d $0^{rad},9892$

96 L'angolo $\alpha = 136^c,4167$ espresso in radianti vale

a $1^{rad},9866$ b $2^{rad},1428$
c $2^{rad},5234$ d $2^{rad},0865$

97 L'angolo $\alpha = 21^c,9808$ espresso in gradi sessagesimali vale

a $19°46'48''$ b $19°46'58''$
c $19°46'35''$ d nessuno dei precedenti

AUTOVALUTAZIONE

98 L'angolo $\alpha = 42°,8400$ espresso in gradi sessagesimali vale

a $42°50'10''$ b $42°50'20''$
c $42°50'30''$ d nessuno dei precedenti

99 L'angolo $\alpha = 75°46'00''$ espresso in gradi centesimali vale

a $84^c,1852$ b $84^c,1462$
c $84^c,1222$ d nessuno dei precedenti

Valutare senza l'uso della calcolatrice.

100 Per α compreso nell'intervallo 0°-90°, quante volte si ha $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$?

a 2 b 4
c 1 d nessuna

101 Quale uguaglianza è manifestamente impossibile?

a $\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha} = 0,82$ b $2 \cdot \operatorname{sen}\alpha = 2,5$
c $3 \cdot \cos\alpha = 1,2$ d $\operatorname{tg}\alpha = -2,5$

102 Quale funzione goniometrica per $\alpha = 60°$ assume il valore $\sqrt{2}/2$?

a coseno b seno
c tangente d nessuna

103 Quale funzione goniometrica per $\alpha = 30°$ assume il valore $\sqrt{3}/2$?

a coseno b seno
c tangente d nessuna

104 Quale funzione goniometrica per $\alpha = 30°$ assume il valore $1/\sqrt{2}$?

a coseno b seno
c tangente d nessuna

105 Quale unità di misura caratterizza i valori delle funzioni goniometriche?

a radianti b gradi centesimali
c gradi decimali d nessuna dimensione

106 Indicare quale valore assume l'espressione $\sqrt{3}\operatorname{tg}60° - 4\operatorname{tg}45° + \cos 180°$

a 2 b 1
c 0 d -2

107 Indicare quale valore assume l'espressione $(\cos 60° + \operatorname{sen}30°) \cdot (\operatorname{tg}45° + \operatorname{tg}60° - 3 \cdot \operatorname{tg}30°)$

a 1 b $1/2$
c -1 d -2

108 Indicare quale valore assume l'espressione $2\operatorname{sen}60° + \sqrt{3}\cos 30° - 2\cos 60° - 3\operatorname{tg}30°$

a -1 b $1/2$
c 0 d $-1/2$

109 Indicare quale valore assume l'espressione $2\cos 90° + 3\operatorname{tg}45° - \cos 60°$

a 0 b $1/2$
c $7/2$ d nessuno dei precedenti

110 In un triangolo retto in C, quale funzione viene definita dal rapporto b/c?

a $\operatorname{sen}\beta$ b $\cos\beta$
c $\cos\alpha$ d $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\alpha$

111 In un triangolo retto in C, l'ipotenusa misura 2 m e l'angolo acuto β misura 30°. Quanto misura il cateto b?

a 1 m b 2 m
c $2\sqrt{3}$ m d nessuno di questi valori

112 Indicare quale valore k rende vera la relazione:

$\operatorname{sen}45° + k \cdot \operatorname{sen}90° = \cos 45° + \cos 90° + 4\operatorname{sen}30°$

a $k = 1$ b $k = 2$
c $k = 3$ d $k = 4$

113 Indicare quale valore k rende vera la relazione:

$$\frac{k \cdot \operatorname{tg}200° - \operatorname{tg}160°}{\operatorname{tg}45° + \operatorname{tg}225°} = 2\operatorname{tg}20°$$

a $k = 1$ b $k = 2$
c $k = 3$ d $k = 4$

114 Stabilire per quale $\alpha < 360°$ vale la relazione:

$|\operatorname{sen}\alpha| + 1 = 0$

a $\alpha = 270°$
b $\alpha = 90°$
c $\alpha = -90°$
d nessuno dei valori precedenti

115 Stabilire per quale $\alpha < 180°$ vale la relazione:

$\operatorname{tg}2\alpha = 1$

a $\alpha = 45°$ b $\alpha = 22°50'$
c $\alpha = 22°30'$ d $\alpha = 90°$

116 Stabilire per quale $\alpha < 180°$ vale la relazione:

$\cos 3\alpha = 1/2$

a $\alpha = 30°$ b $\alpha = -20°$
c $\alpha = 60°$ d nessuna delle precedenti

117 Stabilire per quale $\alpha < 360°$ vale la relazione:

$\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha = 1$

a $\alpha = 45°$ b $\alpha = 45°$ e $\alpha = 135°$
c $\alpha = 120°$ e $\alpha = 210°$ d nessuna delle precedenti

118 Stabilire per quale $\alpha < 180°$ vale la relazione:

$|3 \cdot \text{tg}\alpha| = \sqrt{3}$

- a $\alpha = 30°$
- b $\alpha = -30°$
- c $\alpha = 30°$ e $\alpha = 150°$
- d nessuna delle precedenti

119 Semplificando l'espressione:

$\text{sen}\,(180° + \alpha) + \text{sen}\,(360° - \alpha) + \text{sen}\,(180° - \alpha)$

si ottiene

- a $-\text{sen}\,\alpha$
- b $\text{sen}\,\alpha$
- c 1
- d $2\cos\alpha$

120 Semplificando l'espressione:

$\text{sen}\,(90° + \alpha) - \cos\,(180° + \alpha) - \text{sen}\,(90° - \alpha)$

si ottiene

- a $-\cos\alpha$
- b $\cos\alpha$
- c $2\cos\alpha$
- d nessuna delle precedenti

121 Semplificando l'espressione:

$\cos\,(180° - \alpha) + \cos\,(180° + \alpha) - \cos\,(360° - \alpha)$

si ottiene

- a $-\cos\alpha$
- b $3\cos\alpha$
- c $\cos\alpha$
- d $-3\cos\alpha$

122 Semplificando l'espressione:

$\text{sen}\,(-\alpha) + \cos\,(-\alpha) - \text{sen}\,(90° + \alpha) + \cos\,(90° - \alpha)$

si ottiene

- a $\cos\alpha$
- b $-\cos\alpha$
- c 0
- d $\text{sen}\,\alpha$

123 Una linea forma con l'orizzontale un angolo di 45°, qual è la sua pendenza?

- a 0,5
- b 1
- c 3
- d nessuno di questi valori

B. Verifica delle competenze

● Esercizi e problemi

124 Eseguire la somma: $41°18'10'' + 57^c{,}4930 + 1^{rad}{,}2750$ esprimendola in gradi sessagesimali, gradi centesimali e radianti.
[$166°05'55''$; $184^c{,}554$; $2^{rad}{,}89897$]

125 Calcolare il valore della seguente operazione esprimendola in gradi sessagesimali, gradi centesimali e radianti:

$$\frac{5}{3}\,48^c{,}2500 + \frac{2}{5}\,50°26'30'' - \frac{1}{6}\,0^{rad}{,}7500$$

[$85°23'23''$; $94^c{,}87744$; $1^{rad}{,}49033$]

126 Calcolare il valore della seguente operazione esprimendola in gradi sessagesimali, gradi centesimali e radianti:

$$\frac{1}{3}\,48°56'46'' - \frac{1}{5}\,36^c{,}2970 + \frac{1}{2}\,0^{rad}{,}4310$$

[$22°07'45''$; $24^c{,}58794$; $0^{rad}{,}38622$]

127 La somma di due angoli vale $160°00'00''$ mentre la loro differenza è di $(4/9)\pi$. Determinare la misura dei due angoli in gradi sessagesimali e in gradi centesimali. [120°; 40°]

128 Calcolare i valori dell'ampiezza degli angoli alla base di un triangolo isoscele sapendo che l'angolo al vertice è 2/3 di ciascuno di essi, esprimendoli in gradi sessagesimali e gradi centesimali. [75^c; $67°30'$]

129 L'angolo al centro di un arco di cerchio di raggio $R = 25{,}00$ m ha un'ampiezza di $1^{rad}{,}4875$. Determinare la lunghezza dell'arco. [37,19 m]

130 I tre punti A, B, C giacciono su un cerchio di raggio $R = 27{,}00$ m. L'angolo alla circonferenza ABC ha un'ampiezza di $2^{rad}{,}500$. Determinare la lunghezza dell'arco AC. [135,00 m]

131 La curva di una strada è costituita da un arco di cerchio di raggio $R = 84{,}10$ m e l'angolo al centro definito dagli estremi della curva è di $114^c{,}3840$. Determinare lo sviluppo della curva. [151,11 m]

132 Determinare l'angolo al centro di una curva circolare di raggio $R = 72{,}00$ m e sviluppo di 148,70 m, espresso in gradi sessagesimali e in gradi centesimali.
[$118°19'54''$; $131^c{,}48$]

133 La curva di una strada è costituita da un arco di cerchio di sviluppo 176,94 m e l'angolo al centro definito dagli estremi della curva è di $110°24'24''$. Determinare il raggio della curva. [91,823 m]

134 In un rombo l'angolo acuto è $68^c{,}0555$ e il raggio iscritto allo stesso rombo è $R = 10{,}00$ m. Determinare lo sviluppo dei quattro archi definiti dai punti di tangenza tra cerchio e rombo. [10,675 m; 20,74 m]

135 Da un punto P esterno a un cerchio di raggio $R = 15{,}00$ m si conducono due semirette PA e PB tangenti al cerchio e che formano l'angolo $APB = 89^c{,}7963$. Determinare lo sviluppo dell'arco AB compreso tra i due punti di tangenza. [25,90 m]

136 Determinare il raggio del cerchio sapendo che l'arco AB sulla sua circonferenza ha uno sviluppo di 26 m, e che il corrispondente angolo al centro è di $29^c{,}1157$.
[56,85 m]

AUTOVALUTAZIONE

137 Un arco ha gli estremi A e B coincidenti con gli estremi dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo e isoscele, mentre il centro coincide con il vertice comune ai due cateti del triangolo. Sapendo che ciascuno dei due cateti è lungo 22 m, qual è lo sviluppo dell'arco AB? [34,56 m]

138 Due cerchi hanno lo stesso raggio di 15 m. La circonferenza del primo cerchio passa per il centro del secondo cerchio, e viceversa. Calcolare lo sviluppo di ciascuno dei due archi che si determinano nell'intersezione dei due cerchi. [31,41 m]

Valutare le seguenti espressioni goniometriche

139 Sapendo che $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, calcolare sen α, tg α, cotg α.

$$\left[\operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{4}{5};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3};\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{3}{4}\right]$$

140 Sapendo che $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{7}{3}$, calcolare sen α, tg α, cos α.

$$\left[\operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{3\sqrt{58}}{58};\ \cos\alpha = \pm\frac{7\sqrt{58}}{58};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{7}\right]$$

141 Trasformare l'espressione $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$
a) in modo che in essa figuri solo la funzione seno;
b) in modo che in essa figuri solo la funzione tangente.

$$\left[1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha;\ \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right]$$

142 Si calcolino i valori delle funzioni trigonometriche di:
a) 15° osservando che 15° = 45° − 30°
b) 15° osservando che 15° = 60° − 45°
c) 15° osservando che 15° = 90° − 75°
d) 75° osservando che 75° = 45° + 30°
e) 105° osservando che 105° = 60° + 45°
f) 105° osservando che 105° = 90° + 15°.

143 Sapendo che $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si calcolino i valori di:

sen (α + β)   tg (α − β)   cos (α − β)

nell'ipotesi che α e β siano angoli acuti.

144 Sapendo che tg α = 3 e tg β = 1, calcolare i valori di:

sen (α − β)   cos (α + β)   tg (α − β)

145 Sapendo che sen α = 1 e $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}$, si calcolino i valori di:

sen (α + β)	cos (α + β)
sen (α − β)	cos (α − β)
tg (α + β)	cotg (α + β)
tg (α − β)	cotg (α − β)

146 Sapendo che $\cos\alpha = +\frac{1}{2}$, si calcolino i valori di:

sen 2α	cos 2α	tg 2α	cotg 2α
sen α/2	cos α/2	tg α/2	cotg α/2

nell'ipotesi che α sia minore di 90°.

147 Sapendo che $\operatorname{sen}\alpha = +\frac{1}{2}$, si calcolino i valori di:

sen 2α	cos 2α	tg 2α	cotg 2α
sen α/2	cos α/2	tg α/2	cotg α/2

nell'ipotesi che α sia compreso tra 90° e 180°.

148 Sapendo che $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$, si calcolino i valori di:

sen 2α	cos 2α	tg 2α	cotg 2α
sen α/2	cos α/2	tg α/2	cotg α/2

nell'ipotesi che α sia compreso tra 180° e 270°.

149 Sapendo che $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, si calcolino i valori di:

sen 2α	cos 2α	tg 2α	cotg 2α
sen α/2	cos α/2	tg α/2	cotg α/2

nell'ipotesi che α sia compreso tra 90° e 180°.

150 Sapendo che tg α = −1, si calcolino i valori di:

sen 2α	cos 2α	tg 2α	cotg 2α
sen α/2	cos α/2	tg α/2	cotg α/2

nell'ipotesi che α sia compreso tra 270° e 360°.

151 Verificare le seguenti identità:

a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} + \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta} = 1$

b) $\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha =$
$= \cos^2\alpha\,(1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha)$

c) $\frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha$

d) $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

e) $\frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1}$

f) $\cos^4\alpha + \operatorname{sen}^4\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$

g) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

152 Verificare le seguenti identità:

a) $\dfrac{\text{tg}(\alpha+\beta)}{\text{tg}\,\alpha} = \dfrac{\text{cotg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta}{\text{cotg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha}$

b) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$

c) $\text{sen}^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) = 1 + \text{sen}\,2\alpha \cdot \text{sen}\,2\beta$

d) $2\,\text{cotg}\,2\alpha = \text{cotg}\,\alpha - \text{tg}\,\alpha$

e) $\text{cotg}\,\alpha + \text{tg}\,\alpha = \dfrac{2}{\text{sen}\,2\alpha}$

f) $\text{sen}(\alpha+\beta)\,\text{sen}(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

g) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \text{sen}^2\alpha$

h) $\dfrac{2\,\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} = \text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta$

i) $\cos^2(\alpha-\beta) - \text{sen}^2(\alpha+\beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta$

l) $\text{cotg}\,\dfrac{\alpha}{2} - \text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} = 2\,\text{cotg}\,\alpha$

m) $1 - \cos 2\alpha = \text{tg}\,\alpha\,\text{sen}\,2\alpha$

n) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \dfrac{1}{\text{tg}\,\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}$

o) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \text{tg}\,\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$

Risolvere i seguenti triangoli rettangoli

153 In un triangolo rettangolo, retto in C, si conoscono l'ipotenusa $c = 251{,}47$ m e l'angolo acuto $\beta = 43^c{,}7025$; determinare il perimetro del triangolo.

[605,36 m]

154 In un triangolo rettangolo, retto in C, si conoscono l'ipotenusa $c = 42{,}78$ m e l'angolo acuto $\alpha = 40^c{,}5320$; determinare l'area del triangolo.

[437,46 m^2]

155 In un triangolo rettangolo, retto in C, si conoscono l'ipotenusa $c = 520{,}37$ m e l'angolo acuto $\beta = 59^c{,}5278$; determinare i cateti del triangolo.

[$b = 418{,}71$ m; $a = 308{,}98$ m]

156 In un triangolo rettangolo, retto in C, si conoscono l'ipotenusa $c = 719{,}52$ m e l'angolo acuto $\beta = 63^c{,}1450$; determinare i cateti del triangolo.

[$b = 602{,}28$ m; $a = 393{,}66$ m]

157 In un triangolo rettangolo, retto in C, si conoscono il cateto $a = 133{,}29$ m e l'angolo acuto $\beta = 50^c{,}8614$; determinare i lati del triangolo.

[$b = 136{,}95$ m; $c = 191{,}10$ m]

158 In un triangolo rettangolo, retto in C, si conoscono il cateto $b = 88{,}75$ m e l'angolo acuto $\alpha = 36^c{,}4280$; determinare le proiezioni m e n dei cateti sull'ipotenusa.

[$m = 74{,}61$ m; $n = 30{,}95$ m]

159 Determinare perimetro e area del triangolo isoscele ABC, sapendo che la base $BC = 18{,}60$ m e che l'angolo $\beta = 47°{,}3000$.

[$2p = 46{,}03$ m; $S = 93{,}72$ m^2]

160 Determinare la base BC e la relativa altezza del triangolo isoscele ABC, sapendo che il lato $BA = 48{,}65$ m e che l'angolo al vertice $\alpha = 82^c{,}5972$.

[$BC = 58{,}78$ m; $h = 38{,}77$ m]

161 Determinare il perimetro del triangolo isoscele ABC, sapendo che l'altezza relativa alla base è $h = 41{,}45$ m e l'angolo al vertice $\alpha = 67{,}4111$ gon.

[$2p = 144{,}56$ m]

162 In un triangolo rettangolo, retto in C, si conosce il rapporto tra il cateto a e quello b che risulta $\sqrt{3}$. Sapendo che l'ipotenusa è di 50 m, determinare il perimetro del triangolo.

[$2p = 118{,}30$ m]

163 In un triangolo rettangolo, retto in C, si conoscono i seguenti elementi: $(c + a) = 172{,}52$ m; $\alpha = 41^c{,}6327$. Calcolare i lati del triangolo.

[$c = 107{,}26$ m; $a = 65{,}25$ m; $b = 85{,}14$ m]

164 In un triangolo rettangolo, retto in C, si conoscono i seguenti elementi: $(a + b) = 59{,}75$ m; $\alpha = 48^c{,}0926$. Calcolare i lati del triangolo.

[$c = 42{,}27$ m; $a = 28{,}98$ m; $b = 30{,}77$ m]

165 In un triangolo rettangolo, retto in C, si conoscono i seguenti elementi: $(a + b) = 15{,}20$ m; $\alpha = 72^c{,}9630$. Calcolare i lati del triangolo.

[$c = 11{,}48$ m; $a = 10{,}46$ m; $b = 4{,}73$ m]

166 In un triangolo rettangolo, retto in C, si conoscono i seguenti elementi: $(a - b) = 12{,}20$ m; $\beta = 52^c{,}4074$. Calcolare i lati del triangolo.

[$c = 228{,}18$ m; $b = 167{,}33$ m; $a = 155{,}13$ m]

167 In un triangolo rettangolo, retto in C, si conosce l'area pari a $450 \cdot \sqrt{3}$ m^2 mentre l'angolo acuto β è la metà dell'altro angolo acuto α. Calcolare gli elementi incogniti del triangolo.

[$c = 60$ m; $b = 30$ m; $a = 51{,}96$ m]

168 Calcolare l'area di un parallelogramma di cui si conoscono le misure di due lati consecutivi (8 m e 6 m) e l'ampiezza dell'angolo compreso (120°).

[$S = 41{,}57$ m^2]

169 Determinare il perimetro e l'area del triangolo isoscele ABC conoscendo la lunghezza dei due lati uguali $AC = BC = 9{,}00$ m e l'ampiezza degli angoli alla base AB, uguali a $73^c{,}5602$. (*Suggerimento*: tracciare l'altezza relativa alla base.)
[25,26 m; 29,90 m^2]

170 Determinare il perimetro e l'area del triangolo isoscele ABC conoscendo la lunghezza della base $AB = 24{,}00$ m e l'ampiezza dell'angolo al vertice C, uguale a $55^c{,}5555$.
[80,78 m; 308,80 m^2]

171 Determinare il perimetro di un triangolo scaleno ABC di cui sono noti il lato $AB = 36$ m, l'angolo $C\widehat{A}B = 68^c{,}50$ e l'angolo $A\widehat{B}C = 44^c{,}80$. (*Suggerimento*: tracciare l'altezza relativa alla base AB.)
[139,39 m]

172 Determinare il perimetro di un triangolo scaleno ABC di cui sono noti il lato $CB = 16{,}5$ m, l'angolo $A\widehat{C}B = 94^c{,}70$ e l'angolo $A\widehat{B}C = 58^c{,}40$. (*Suggerimento*: tracciare l'altezza relativa alla base AB.)
[60,474 m]

173 Determinare il perimetro di un trapezio rettangolo $ABCD$ sapendo che l'altezza di 17,14 m è uguale alla base minore CD e conoscendo l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{C}D = 138^c{,}40$. (*Suggerimento*: tracciare l'altezza del trapezio da C.)
[84,04 m]

174 Determinare il perimetro di un trapezio rettangolo $ABCD$ di cui sono noti il lato obliquo $CB = 20{,}00$ m, la base maggiore $AB = 28{,}50$ m e l'angolo $A\widehat{B}C = 68^c{,}50$. (*Suggerimento*: tracciare l'altezza del trapezio da C.)
[85,104 m]

175 Determinare il perimetro di un trapezio $ABCD$ di cui sono noti il lato obliquo $AD = 26{,}5$ m, la base maggiore $AB = 52{,}8$ m, l'angolo $D\widehat{A}B = 62^c{,}80$ e l'angolo $A\widehat{B}C = 54^c{,}60$. (*Suggerimento*: tracciare l'altezza del trapezio da D.)
[127,59 m]

176 In un triangolo rettangolo ABC sono noti i due cateti AC e AB:

$\overline{AC} = b = 12{,}75$ m $\qquad \overline{AB} = c = 19{,}54$ m

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1 : 500.
[$\beta = 33°07'30''$ ($\beta = 36^c{,}8053$);
$a = 23{,}33$ m; $\gamma = 56°52'30''$ ($\gamma = 63^c{,}1947$)]

177 In un triangolo rettangolo ABC si conoscono i cateti b e c:

$b = 1174{,}38$ m $\qquad c = 876{,}44$ m

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1 : 20 000.
[$\beta = 59^c{,}1847$ ($53°15'58''$);
$\gamma = 40^c{,}8153$ ($36°44'02''$); $a = 1465{,}36$ m]

178 In un triangolo rettangolo ABC si conoscono i cateti:

$\overline{AC} = b = 96{,}37$ m $\qquad \overline{AB} = c = 150{,}84$ m

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1 : 2000.
[$\beta = 36^c{,}1932$; $\gamma = 63^c{,}8068$; $a = 179{,}00$ m]

179 In un triangolo rettangolo ABC si conoscono i cateti b e c:

$b = 131{,}40$ m $\qquad c = 152{,}78$ m

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1 : 2000.
[$\beta = 45^c{,}2200$; $\gamma = 54^c{,}7799$; $a = 201{,}51$ m]

180 In un triangolo rettangolo ABC si conoscono l'ipotenusa c e il cateto a:

$c = 741{,}30$ m $\qquad a = 496{,}54$ m

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1 : 10 000.
[$b = 550{,}41$ m]

181 In un triangolo rettangolo ABC si conoscono l'ipotenusa c e il cateto b:

$c = 42{,}10$ m $\qquad b = 15{,}80$ m

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1 : 500.
[$a = 39{,}02$]

182 In un triangolo rettangolo MNP, rettangolo in N sono dati: cateto $\overline{MN} = 364{,}58$ m; ipotenusa $\overline{MP} = 432{,}72$ m. Calcolare gli elementi incogniti e disegnare la figura in scala 1 : 5000.
[$\widehat{P} = 57°24'30''$; $\widehat{M} = 32°35'30''$; $\overline{NP} = 233{,}08$ m]

183 In un triangolo rettangolo ACE, rettangolo nel vertice E, si conoscono l'ipotenusa AC e l'angolo acuto nel vertice C:

$\overline{AC} = 98{,}50$ m $\qquad A\widehat{C}E = 64^c{,}5360$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1 : 1000.
[$E\widehat{A}C = 35^c{,}4640$; $\overline{CE} = 52{,}08$ m; $\overline{AE} = 83{,}61$ m]

184 In un triangolo rettangolo si conoscono l'ipotenusa $c = 39{,}40$ e l'altezza relativa $h = 15{,}50$ m. Calcolare gli altri elementi.
[$b = 35{,}30$ m; $a = 17{,}20$ m;
$\beta = 71^c{,}1744$; $\gamma = 28^c{,}8256$]

185 In un triangolo rettangolo ABC, retto in C, il cateto a misura 50 m e la sua proiezione sull'ipotenusa misura 14 m. Determinare il perimetro del triangolo.
[$c = 178{,}57$ m; $b = 171{,}43$ m; $2p = 400$ m]

186 In un triangolo isoscele ABC, la base AB è lunga 28 m e la sua altezza misura 45 m. Determinare il perimetro del triangolo.
[Lato = 47,127 m; $2p$ = 122,25 m]

187 Determinare perimetro e area di un trapezio rettangolo $ABCD$ conoscendo la base maggiore AB = 90 m, l'altezza AD = 25 m e il lato obliquo BC = 36 m.
[$2p$ = 215,1 m; S = 1926,21 m^2]

188 Determinare perimetro e area di un trapezio rettangolo $ABCD$ conoscendo l'altezza AD = 30 m, l'angolo $A\widehat{B}C = 60°$ e sapendo che la diagonale minore AC è perpendicolare al lato obliquo BC.
[$2p$ = 185,88 m; S = 1818,63 m^2]

189 Una scala è appoggiata alla parete di un fabbricato. Sapendo che l'estremo superiore della scala si trova a un'altezza di 3,50 m e che l'appoggio dista 1,50 m dalla parete verticale, determinare la pendenza della retta su cui giace la scala, e la sua lunghezza.
[p = 2,33; L = 3,81 m]

190 Da un punto P si sono tracciate le due tangenti a un cerchio di raggio R = 26,00 m. Sapendo che la corda che congiunge i due punti di tangenza è lunga c = 40,22 m, determinare l'angolo che le due tangenti formano in P.
[87^c,409]

191 Da un punto P si sono tracciate le due tangenti a un cerchio di raggio R = 52,00 m. Sapendo che la lunghezza tra P e ciascuno dei due punti di tangenza è di 108,40 m, determinare la lunghezza della corda che congiunge i due punti di tangenza. [93,77 m]

192 Determinare il perimetro di un triangolo scaleno ABC di cui sono noti i lati AC = 55,60 m e AB = 62,40 m, e l'angolo $C\widehat{A}B$ = 61^c,88. (*Suggerimento*: tracciare l'altezza relativa alla base AB o AC.) [173,44 m]

193 Determinare il perimetro di un triangolo scaleno ABC di cui sono noti i lati AC = 42,80 m e CB = 91,80 m, oltre all'area S = 1780,00 m^2. (*Suggerimento*: tracciare l'altezza relativa alla base AC o BC.)
[217,87 m]

Risultati dei quesiti vero/falso

1F, 2V, 3F, 4V, 5F, 6F, 7V, 8F, 9V, 10V, 11V, 12F, 13V, 14F, 15V, 16V, 17F, 18F, 19V, 20F, 21F, 22V, 23F, 24V, 25F, 26V, 27V, 28F, 29V, 30F, 31V, 32F, 33F, 34V, 35V, 36F, 37V, 38V, 39F, 40F, 41F, 42V, 43V, 44F, 45V, 46V, 47F, 48F, 49V, 50F, 51V, 52V, 53F, 54V, 55F, 56F, 57F, 58V, 59F, 60V, 61F.

Risultati dei quesiti a risposta multipla

89c, 90d, 91c, 92b, 93c, 94d, 95a, 96b, 97b, 98d, 99a, 100c, 101b, 102d, 103a, 104d, 105d, 106d, 107a, 108b, 109d, 110d, 111a, 112b, 113c, 114d, 115c, 116d, 117b, 118c, 119a, 120b, 121d, 122c, 123b.