Equazioni di 2º grado e parabole, disequazioni di 2º grado

Teoria in sintesi

PARABOLA

Ogni funzione $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, rappresenta una parabola, con le seguenti caratteristiche:

- L'asse della parabola è parallelo all'asse delle y
- Il vertice ha ascissa $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ (l'ordinata si può trovare sostituendo questo valore nella funzione)
- La parabola ha la concavità rivolta verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$
- La "apertura" della parabola è tanto maggiore, quanto maggiore è $|a|$.
- Per tracciare il grafico qualitativo della parabola si determinano il vertice $V\left(-\dfrac{b}{2a};...\right)$ e le intersezioni con gli assi.

N.B.: Per queste ultime ricorda che devi risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \qquad \text{che dà} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{cases} \qquad \text{che dà} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

DISEQUAZIONI DI 2º GRADO

$ax^2 + bx + c > 0$

$ax^2 + bx + c < 0$

N.B.: Possiamo sempre fare riferimento ai casi in cui il coefficiente *a* è positivo. Infatti se *a* è negativo, basta cambiare segno a tutti i termini e invertire il senso delle disequazioni.
(esempio: $-x^2 - 2x + 3 > 0$ è equivalente a $x^2 + 2x - 3 < 0$)

- **METODO GRAFICO (uso della parabola)**

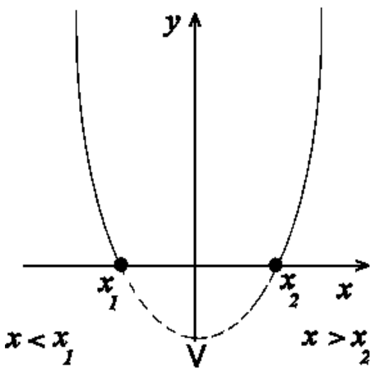
  Per dare una interpretazione grafica delle disequazioni di secondo grado

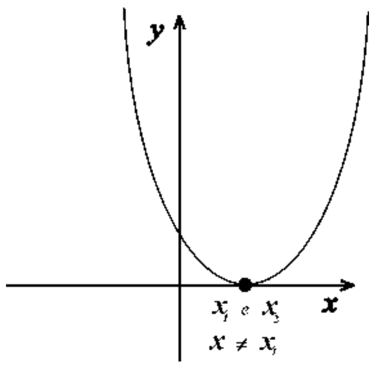
  $ax^2 + bx + c > 0$
  $ax^2 + bx + c < 0$

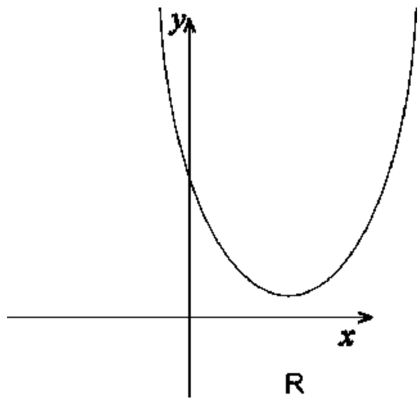
  a) si disegna la parabola;
  b) si cercano gli eventuali punti di intersezione della parabola con l'asse *x*;
  c) si considerano le soluzioni delle disequazioni che sono date dalle ascisse dei punti della parabola che hanno ordinata positiva $(y > 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c > 0)$ oppure negativa $(y < 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c < 0)$.

I casi possibili risultano riassunti nel seguente schema:

- $ax^2 + bx + c > 0$







- $ax^2 + bx + c \leq 0$

Costruisci tu per questo caso lo schema riassuntivo in modo analogo. Ricorda che in questo caso si procede considerando la parte di parabola che sta nel semipiano delle *y* negative.

- **DECOMPOSIZIONE DEL TRINOMIO DI SECONDO GRADO**

  La risoluzione analitica delle disequazioni

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (ax^2 + bx + c < 0)$$

  avviene nel modo seguente

  1. $ax^2 + bx + c > 0$

  $\Delta > 0$ dette $x_1; x_2$ le due soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$ e posto $x_1 < x_2$ si ha

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

E quindi, dalle regole dei segni, otteniamo la soluzione

$$x < x_1 \vee x > x_2$$

(**N.B.:** Il simbolo $\vee$, preso in prestito dalla logica, sta a significare che si considera l'unione dei due insiemi $x < x_1$, $x > x_2$).

2. $\Delta = 0$ $\quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

   quindi soluzione

$$x \neq x_1$$

3. $\Delta < 0$

   soluzione

$$\mathbf{R}$$

Invece per la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ in modo analogo si ottiene:

1. $\Delta > 0$ $\quad x_1 < x < x_2$, ossia per *valori interni* all'intervallo di estremi x_1, x_2;
2. $\Delta = 0$ $\quad$ non è mai verificata;
3. $\Delta < 0$ $\quad$ non è mai verificata;

Svolgere per esercizio uno schema analogo al caso precedente.

Esercizi

1. Tracciare il grafico qualitativo delle seguenti parabole, dopo averne trovato il vertice e l'intersezione con gli assi:

   a) $y = x^2$, $\quad y = -x^2$, $\quad y = x^2 + 1$, $\quad y = -(x^2 + 1)$, $\quad y = x^2 - 1$, $\quad y = -(x^2 - 1)$;
   b) $y = 2x^2 - x - 1$;
   c) $y = x^2 + 4x + 10$;
   d) $y = x^2 + 2x + 1$;
   e) $y = x^2 + 3x + 2$;

2. Risolvere in $\Re$, dopo aver impostato la discussione, le seguenti equazioni:

   $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{2x-3}{x^2 - 3x + 2}$; $\quad x^2 + 6x + 20 = 0$

   ($\dfrac{3}{2}$; $\quad$ Non ha soluzioni)

$$\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2(x^2+4)}{x^2-4}$$

(Non ha soluzioni)

$$\frac{x^2-x}{x-1}=1; \quad \frac{4x^2-1}{2x+1}+2=0$$

(Si possono semplificare i conti?)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{x-1}-\frac{4}{x} \qquad [5, \quad -2]$$

$$\frac{1}{1-x}+\frac{4}{3}=\frac{1}{x+1}-\frac{1+x}{x-1} \qquad \left[\pm\frac{\sqrt{7}}{7}\right]$$

$$\frac{7x-10}{x^2-6x+8}=\frac{5}{2-x}+\frac{x+5}{x-4} \qquad [5]$$

$$\frac{(x+1)^2-1}{4x^2-4x+1}+\frac{4x}{2x-1}=0 \qquad \left[0, \quad \frac{2}{9}\right]$$

3. Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado utilizzando il metodo grafico (parabola…)

   a) $x^2>0 \quad -x^2>0 \quad x^2+1>0$
   $x^2<0 \quad -x^2<0 \quad -(x^2+1)<0$

   b) $3x^2-x-2<0; \quad 25x^2-2x+4>0; \quad 12x^2-3x+1>0$
   $\left[-\frac{2}{3}<x<1; \quad \forall x; \quad \forall x\right]$

4. Risolvere usando il metodo di decomposizione del trinomio di secondo grado.

   a) $x^2-3x+2>0 \qquad x^2-x-12<0$
   $[x>2 \quad \vee \quad x<1]; \quad [-3<x<4]$

   b) $x^3-3x^2-4x+12>0$
   [Ricorda: $x^3-3x^2-4x+12=(x-2)\cdot(....)$,]

   N.B.: questo è uno dei rari casi fortunati in cui troviamo ad occhio una soluzione dell’equazione corrispondente di terzo grado. In generale questo non è possibile. Vedremo comunque nel corso che disequazioni come queste si risolvono facilmente con metodi grafici.

   c) $x^4-13x^2+36\geq 0$
   [Poni: $x^2=y; \quad y^2-13y+36\geq 0....$]

   d) $x^3-8\leq 0$
   [Ricorda: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $\quad x>2$]

5. Equazioni frazionarie:
N.B.: Ricorda sempre di imporre che i denominatori siano diversi da zero.

$$\frac{1}{x^2-3x}-\frac{9}{8x}=\frac{29}{2x^3+2x^2-24x}-\frac{1}{x^2+4x} \qquad \left[x=\frac{7}{9}\right]$$

$m.c.m = 8x(x-3)(x+4)$

6. $$\frac{x+2}{x^2-2x-3}+\frac{3x}{(x-2)(x^2-2x-3)}=\frac{1+2x}{x^2-5x+6} \qquad \left[x=\pm\sqrt{5}\right]$$

N.B.: $m.c.m = (x+1)(x-3)(x-2)$

$$\left(\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}\right):\left(1-\frac{x-2}{x+2}\right)-\frac{1}{2}+x=0 \qquad \text{[impossibile]}$$

N.B.: L'equazione risolutiva, dopo aver svolto i passaggi è: $3x^2-5x+6=0$

7. Equazioni letterali

$3x^2+5ax=0$ [0, $-\frac{5a}{3}$ in questa equazione *a* può essere qualunque?]

$9x^2+a^2=0$ [Qual'è l'unico caso per cui questa equazione è possibile?]

$2ax^2-b=0$ [$\pm\sqrt{\frac{b}{2a}}$, se *a*, *b* > 0: discutere attentamente gli altri casi]

$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=0$ [impossibile, attenzione a considerare i vari casi]

$x^2-\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)x+\frac{ab}{6}=0$ $\left[\frac{a}{2},\ \frac{b}{3}\right]$

$\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{(a-b)^2}{(x-a)(x-b)}$ [impossibile]

$\frac{a^2}{x^2+ax}+\frac{x}{x+a}=\frac{a}{x}$ [a]

8. Risolvere le seguenti equazioni nelle quali compaiono dei valori assoluti:

$\left|x^2-5x\right|=6$ [$6,\ -1,\ 3,\ 2$]

$\left|x^2-3x+1\right|=1$ [$0,\ 3,\ 2,\ 1$]

$\left|6-x^2\right|=6$ [$0,\ 0,\ \pm\sqrt{12}$]

$\left|\frac{x^2-2}{x}\right|=1$ [$2,\ -1,\ 1,\ -2$]

Esempio di procedure possibili

1. $$\begin{cases} x^2 - 5x > 0 & \Rightarrow \quad x^2 - 5x = 6 \\ x^2 - 5x < 0 & \Rightarrow \quad 5x - x^2 = 6 \end{cases}$$

2. Risolvere graficamente, trovando l'intersezione tra la retta $y=6$ e la curva di equazione $y = \left| x^2 - 5x \right|$.