Esponenziali e logaritmi

Teoria in sintesi

ESPONENZIALI

Potenze con esponente reale

La potenza a^x è definita:

- se $a > 0$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- se $a = 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{R}^+$;
- se $a < 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{Z}$.

Sono definite:

$$\left(-\sqrt{3}\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right);$$
$$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2};$$
$$3^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{3^{\sqrt{2}}}.$$

Non sono definite:

$$\left(-2^{\sqrt{3}}\right); \quad 0^0 \quad ; \quad 0^{-3}.$$

Casi particolari :

- $a = 1$, $1^x = 1$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $x = 0$, $a^0 = 1$, per ogni $a \in \mathbf{R}^+$;

Le proprietà delle potenze definite per esponenti interi valgono anche per esponenti reali:

Se $a > 0$, per ogni x, y appartenenti a $\mathbf{R}$ vale:

1. $\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$;
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
3. $a^x : a^y = a^{x-y}$;
4. $(a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
5. $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$

Funzione esponenziale

Si chiama *funzione esponenziale* ogni funzione del tipo :

$y = a^x$, con $a > 0$ fissato, $x \in \mathbf{R}$.

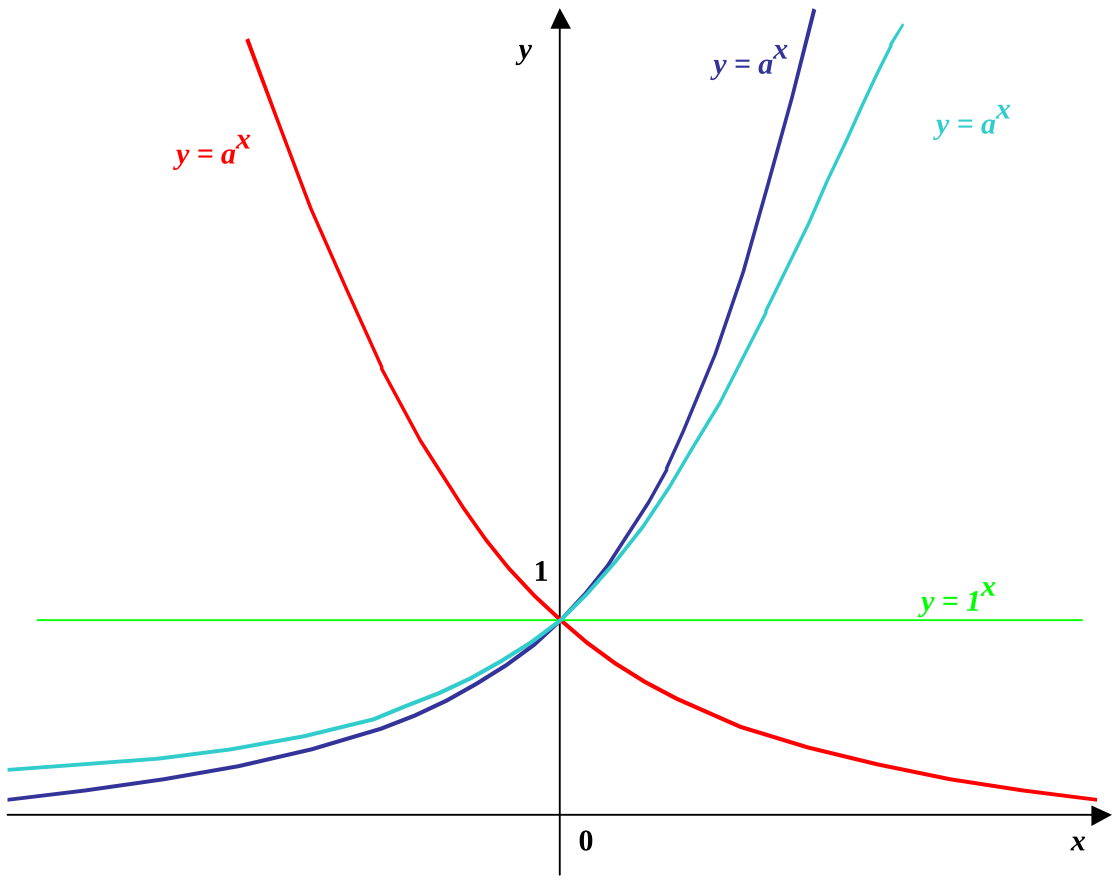
Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è tutto $\mathbf{R}$;

il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è $\mathbf{R}^+$ (la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva).

Si distinguono tre casi:

- $a > 1$: funzione crescente : $x > y \Rightarrow a^x > a^y$;
- $a = 1$: funzione costante : $a^x = 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $0 < a < 1$: funzione decrescente : $x > y \Rightarrow a^x < a^y$.

I seguenti grafici illustrano il comportamento della funzione esponenziale nei vari casi :



$0 < a < 1$; $a > 1$; $a > 1$; $a > a$

EQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMI

Un'equazione si dice *esponenziale* quando l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze.

L'equazione esponenziale più semplice (elementare) è del tipo :

$a^x = b$, con $a > 0$ e $b > 0$; x è l'incognita dell'equazione.

Un'equazione esponenziale del tipo $a^x = b$ può essere *impossibile, indeterminata o determinata* :

- *impossibile* se $b \leq 0$, oppure $b \neq 1$ e $a = 1$; esempio : $2^x = -3$ oppure $1^x = 5$;
- *indeterminata* se $a = 1$, $b = 1$; esempio : $1^x = 1$;
- *determinata* se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$; esempio : $3^x = 5$.

Si chiama **logaritmo in base *a* di *b*** l'unica soluzione dell'equazione esponenziale elementare nel caso determinato, cioè l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b .

$$a^x = b$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \log_a b$$

***a* = base dell'eponenziale**
***e* del logaritmo**

Supponiamo di dover risolvere un'equazione esponenziale $a^x = b$:

- se a e b si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, si eguagliano gli esponenti :
  $2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3$;
- se a e b non si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, le soluzioni si scrivono sotto forma di logaritmi : $2^x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = log_2 3$.

Il logaritmo risulta essere l'operazione inversa dell'esponenziale, pertanto le limitazioni cui è soggetto l'esponenziale si riflettono sul logaritmo: fissata la base a>0 , deve essere b>0 , inoltre valgono i casi particolari: $log_a 1 = 0$, poichè $a^0 = 1$; $log_a a = 1$, poichè $a^1 = a$.

Analogamente, alle proprietà degli esponenziali precedentemente elencate corrispondono le seguenti proprietà dei logaritmi:

1) $\log_a x^y = y \cdot \log x \qquad (x \in \mathbf{R}^+ \; ; \; y \in \mathbf{R} , \; a > 0)$;
2) $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y \qquad (x \in \mathbf{R}^+ \; ; \; y \in \mathbf{R}^+ , a > 0)$;
3) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad (x \in \mathbf{R}^+ \; ; \; y \in \mathbf{R}^+ , a > 0)$;
4) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \qquad (a, b, c > 0)$; formula di cambiamento di base nei logaritmi.

I logaritmi che compaiono sulle calcolatrici sono in base $a = 10$ oppure in base $a = e \approx 2{,}718$: $log\, x$ indica il $log_{10} x$, detto anche *logaritmo decimale*; $ln\, x$, indica il $log_e x$, detto anche *logaritmo naturale* o *neperiano*.

Funzione logaritmica

Si chiama *funzione logaritmica* ogni funzione del tipo :

$y = log_a\, x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$ fissato, $x \in \mathbf{R}^+$.

La funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale, pertanto *dominio* e *codominio* risultano scambiati rispetto a quelli della funzione esponenziale.

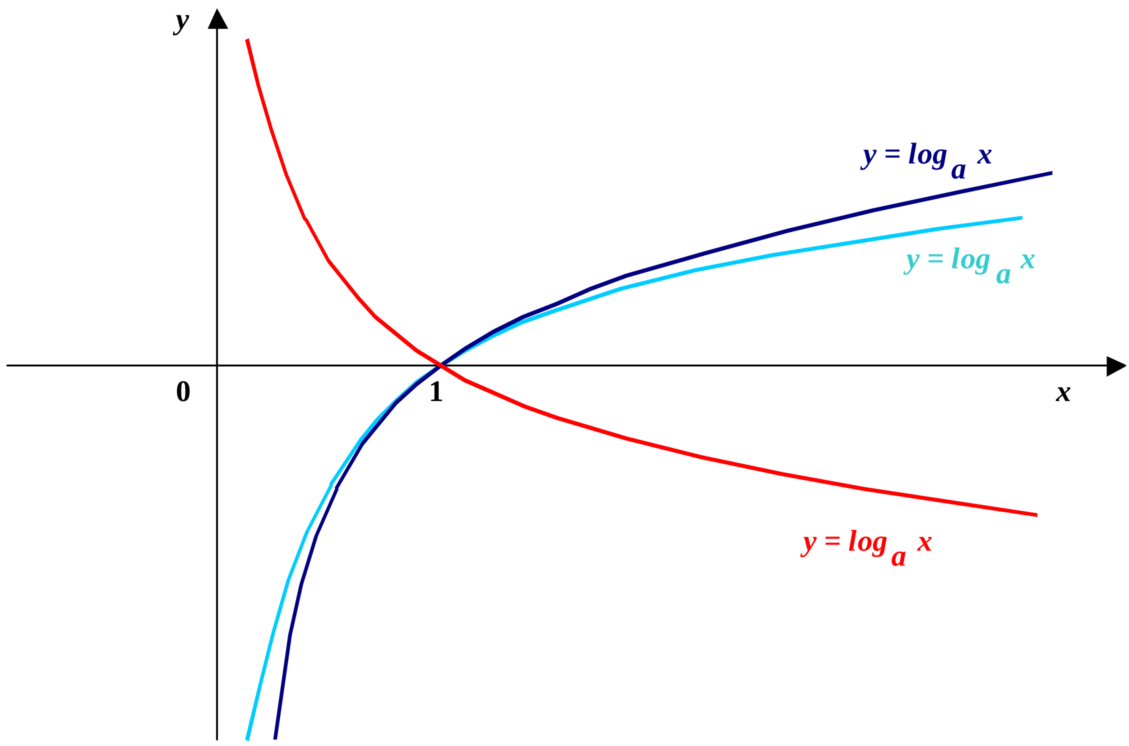
Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è $\mathbf{R}^+$;

il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è $\mathbf{R}$.

Si distinguono due casi:

- $a > 1$: funzione crescente : $x > y \Rightarrow log_a\, x > log_a\, y$;
- $0 < a < 1$: funzione decrescente : $x > y \Rightarrow log_a\, x < log_a\, y$;

I grafici della funzione logaritmica si ottengono da quelli della funzione esponenziale per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ($y = x$) ; essi illustrano il comportamento della funzione esponenziale nei vari casi :



0 < a < 1 ; ***a > 1*** ; ***a > 1*** ; ***a > a***

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Un'equazione si dice *logaritmica* quando l'incognita compare soltanto nell'argomento di uno o più logaritmi.

L'equazione logaritmica più semplice (elementare) è del tipo :

$$log_a\, x = b \;\; , \;\text{con } a > 0 \;\text{ e }\; b \in \mathbf{R} \;\; ; \;\; x > 0 \;\text{ è l' incognita dell' equazione}.$$

La sua soluzione, per quanto detto a proposito dell'equazione esponenziale, è : $x = a^b$.

Per risolvere un'equazione logaritmica conviene:

1. (quando è possibile) trasformare l'equazione data in una equivalente del tipo $log_a\, A(x) = log_a\, B(x)$, applicando le proprietà dei logaritmi ;
2. determinare le soluzioni dell'equazione $A(x) = B(x)$;
3. eseguire il controllo mediante verifica diretta dei valori di x calcolati al punto 2 ;
4. in alternativa al punto 3, associare all'equazione di cui al punto 2 tutte le condizioni di esistenza sui logaritmi (ricordiamo che un logaritmo è definito soltanto per valori positivi del suo argomento), per selezionare le soluzioni accettabili.

Esempi

1. Risolviamo l'equazione:

   $$8 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 16 .$$

   Osserviamo che:

   $$2^{x+1} = 2^x \cdot 2 \quad \text{e}\; 2^{x-1} = \frac{2^x}{2}.$$

   Quindi è possibile trasformare l'equazione assegnata nell'equazione:

   $$8 \cdot \frac{2^x}{2} - 2 \cdot 2^x = 16 \qquad \Rightarrow \qquad 2^x = 8 \qquad \Rightarrow \qquad 2^x = 2^3$$

   La soluzione dell'equazione data è quindi $x = 3$.

2. Risolviamo l'equazione:

   $$5 \cdot 3^x = 7 .$$

   Possiamo trasformare l'equazione eseguendo il logaritmo (in una base qualsiasi, per esempio in base 10) del primo e del secondo membro:

   $$log\left(5 \cdot 3^x\right) = log\, 7 .$$

   Applichiamo la proprietà 2) dei logaritmi:

   $$log\, 5 + log\, 3^x = log\, 7 .$$

   Applichiamo la proprietà 1) dei logaritmi:

   $$log\, 5 + x \cdot log\, 3 = log\, 7 .$$

   Isolando x otteniamo:

   $$x = \frac{log\, 7 - log\, 5}{log\, 3} \quad (*) .$$

   In alternativa potevamo isolare 3^x, ottenendo:

$$3^x = \frac{7}{5}.$$

Prendendo il logaritmo in base 3 di entrambi i membri si ha:

$$x = log_3 \frac{7}{5} = log_3 7 - log_3 5$$

Utilizzando la formula di cambiamento di base 4) si riottiene (*).

3. Risolviamo l'equazione:

$$2^x + 2^{3-x} = 6.$$

Osserviamo che:

$$2^{3-x} = \frac{2^3}{2^x}.$$

L'equazione assegnata è equivalente a:

$$2^x + \frac{8}{2^x} = 6 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2^x \cdot 2^x + 8}{2^x} = \frac{6 \cdot 2^x}{2^x}$$

Il denominatore, essendo una funzione esponenziale, non può assumere il valore zero. Possiamo moltiplicare per 2^x entrambi i membri, ottenendo:

$$\left(2^x\right)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

E' evidente la struttura di equazione algebrica di II grado nell'incognita 2^x.

Risolvendo tale equazione (può essere utile introdurre una variabile ausiliaria $z = 2^x$ per rendere più evidente la natura di equazione di secondo grado) si ha:

$$2^x = 2 \quad \text{oppure} \quad 2^x = 4$$

da cui:

$$x = 1 \quad \text{oppure} \quad x = 2.$$

4. Risolviamo l'equazione logaritmica:

$$log_3(x+1) - log_3(x-2) = log_3 x - 2.$$

Imponiamo le condizioni di esistenza sui logaritmi dell'equazione data, ricordando che gli argomenti devono essere positivi:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \\ x>0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x>-1 \\ x>2 \\ x>0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x>2$$

cioè alla variabile x si possono assegnare solo i valori maggiori di 2.

Risolviamo l'equazione applicando la proprietà 3) dei logaritmi e osservando che $2 = log_3 3^2$:

$$log_3\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = log_3\left(\frac{x}{3^2}\right)$$

Uguagliando gli argomenti si ha la seguente equazione equivalente:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x}{9} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 11x - 9 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{157}}{2}.$$

Il valore $x = \frac{11-\sqrt{157}}{2}$ è minore di 2, quindi non è compatibile con le condizioni di esistenza. L'unica soluzione dell'equazione è data da:

$$x = \frac{11+\sqrt{157}}{2}.$$

Esercizi

1. Tenendo presente che $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, scrivi le seguenti potenze sotto forma di radice:

   a) $3^{\frac{5}{8}}$; $\quad 4^{\frac{2}{3}}$; $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$;

   b) $2^{-\frac{4}{3}}$; $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\quad \left(\frac{11}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

2. Scrivi le seguenti radici sotto forma di potenza con esponente razionale:

   a) $\sqrt[6]{2^5}$; $\quad \sqrt[4]{243}$; $\quad \sqrt[4]{0.25}$;

   b) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; $\quad \sqrt[19]{\frac{1}{256}}$; $\quad \sqrt[7]{\frac{1}{125}}$.

3. Risolvi le seguenti equazioni esponenziali:

   a) $2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\quad \left[\frac{9}{2}\right]$

   b) $8^x \cdot \sqrt{2} = 4^x$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\right]$

   c) $a^x \cdot a^{2x-1} = \frac{a^2}{\sqrt{a}}$ $\quad \left[\frac{5}{6}\right]$

   d) $2^x + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 7$ $\quad \left[\log 2 \frac{14}{5}\right]$

   e) $4^x = 2^x - 2$ $\quad [\varnothing]$

   f) $3 \cdot 5^x = 7$ $\quad \left[log_5 \frac{7}{3} = \frac{log\,7 - log\,3}{log\,5}\right]$

   g) $3^x + 3^{1-x} = 4$ $\quad [0; 1]$

   h) $3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = 3^{x-1}$ $\quad [-1; 2]$

   i) $6 \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ $\quad \left[-1; -\frac{log\,3}{log\,2}\right]$

   j) $2^{2x+3} - 25 \cdot 2^x + 3 = 0$ $\quad [-3; log_2 3]$

4. Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

   a) $log_2(x-1) = 3$ $\quad [9]$

   b) $log(x-2) + log\,5 = log\,x$ $\quad \left[\frac{5}{2}\right]$

   c) $log(x-2) - log(x-1) = log\,5$ $\quad [\varnothing]$

   d) $2 \cdot log_2 x = 2 + log_2(x+3)$ $\quad [6]$

   e) $log(x-1) - 2 \cdot log(x+1) - log\,8 = -2$ $\quad \left[\frac{3}{2}; 9\right]$

   f) $log_3(x-1) = \frac{1}{2} log_3 x$ $\quad \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$