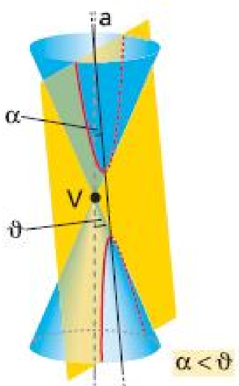
CONICHE

Data una retta r nello spazio che intersechi in V la retta a, si chiama **superficie conica a due falde** la superficie generata in una rotazione completa di r attorno ad a. La parte di spazio racchiusa dalla superficie è detta **cono a due falde**.

- La retta r si dice **generatrice**;
- l'angolo ϑ (teta) che r forma con a si chiama **semiapertura**;
- L'asse di rotazione è anche **asse di simmetria** del cono;
- V è detto **vertice** del cono.

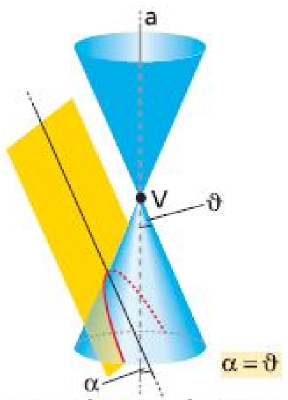
La circonferenza, l'ellisse, la parabola e l'iperbole sono dette sezioni coniche o semplicemente coniche proprio perché tali curve si possono ottenere sezionando con un piano, non passante per il vertice, una superficie conica a due falde.
Possiamo distinguere tre casi.

1. l'angolo α (alfa) formato dal piano con l'asse a del cono è minore della semiapertura ϑ: la sezione conica è un'iperbole.



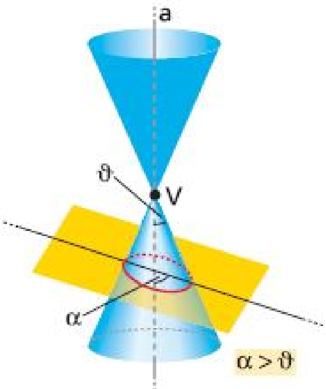
a. La sezione conica è una curva costituita da due rami illimitati: **l'iperbole.**

2. l'angolo α (alfa) formato dal piano con l'asse a del cono è uguale alla semiapertura ϑ: la sezione conica è una parabola.



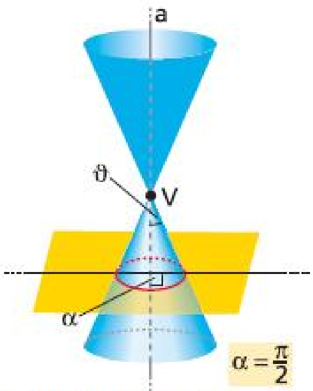
b. La sezione conica è una curva costituita da un unico ramo aperto illimitato: **la parabola.**

3. l'angolo α (alfa) formato dal piano con l'asse a del cono è maggiore della semiapertura ϑ : la sezione conica è un'ellisse.



c. La sezione conica è una curva chiusa e limitata: l'ellisse.

In particolare, se $\alpha = 90°$, abbiamo una circonferenza.



d. L'ellisse è ridotta a una circonferenza.

TEOREMA

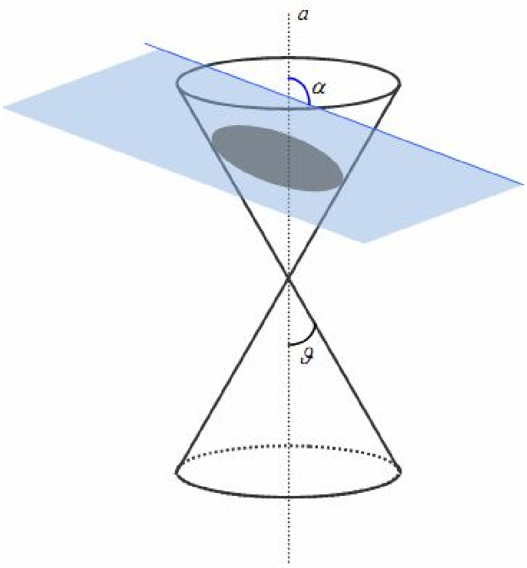
Ogni conica è descritta da un'equazione di secondo grado in due incognite avente la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

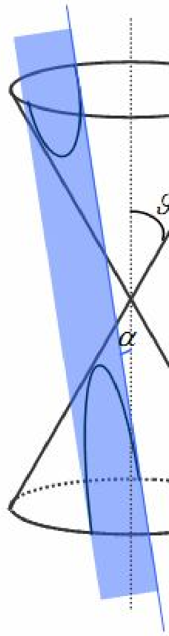
con $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ e A, B, C non contemporaneamente nulli.

Viceversa, se l'insieme delle soluzioni reali di un'equazione algebrica di secondo grado in due incognite non è vuoto, esso rappresenta, nel piano cartesiano, una conica.

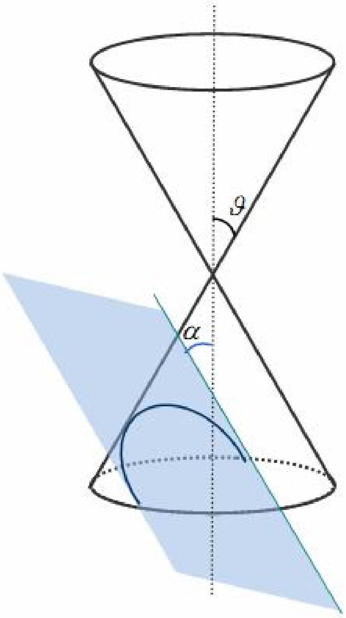
CONICHE



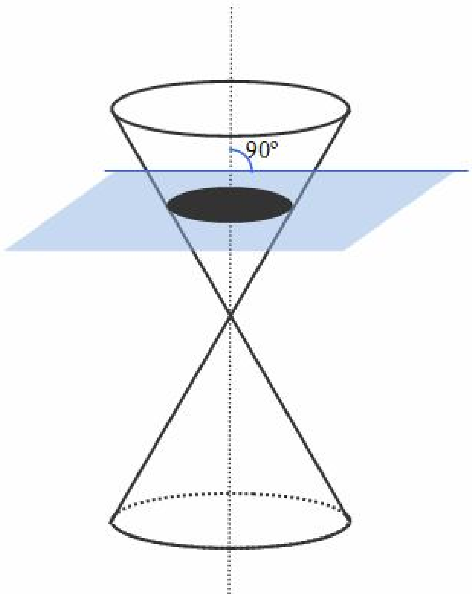
$\alpha > \vartheta$



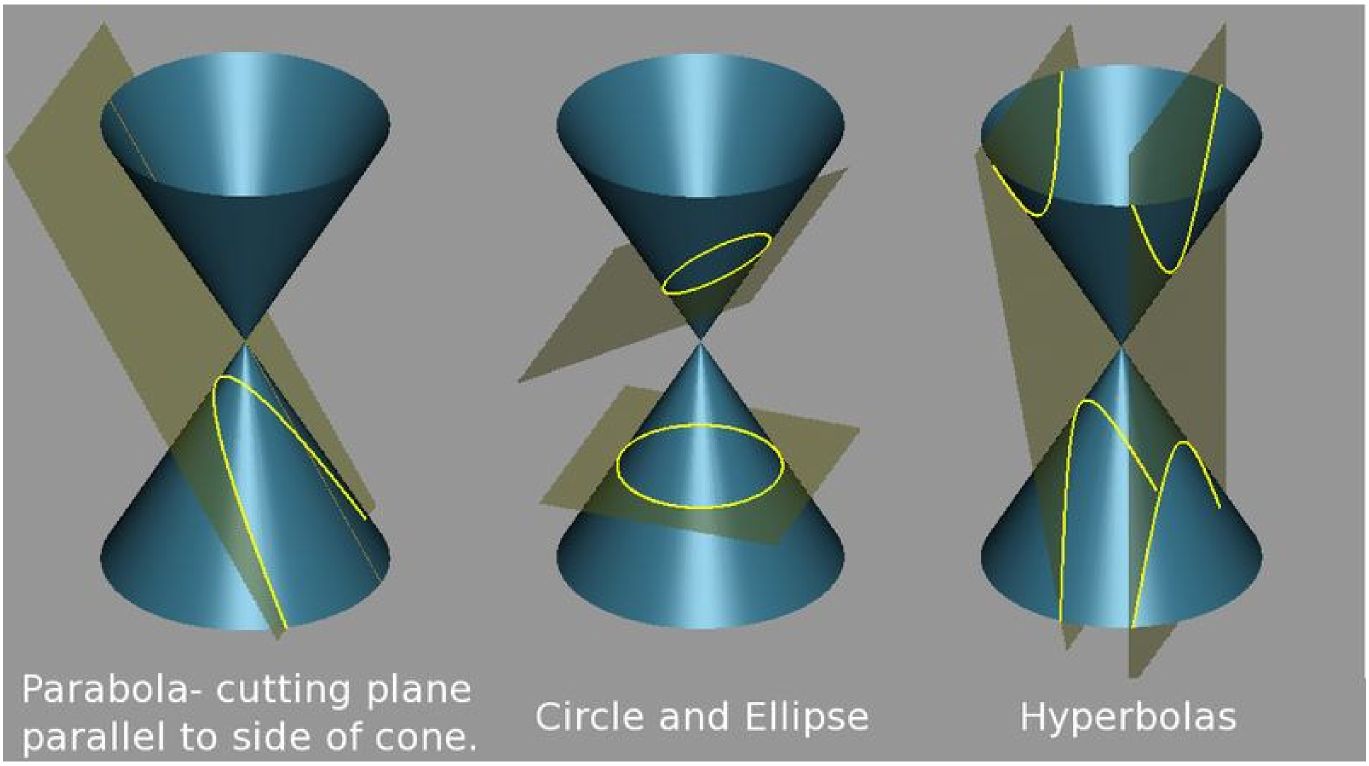
$\alpha < \vartheta$



$\alpha = \vartheta$



$\alpha = 90°$


Parabola- cutting plane
parallel to side of cone.
Circle and Ellipse
Hyperbolas

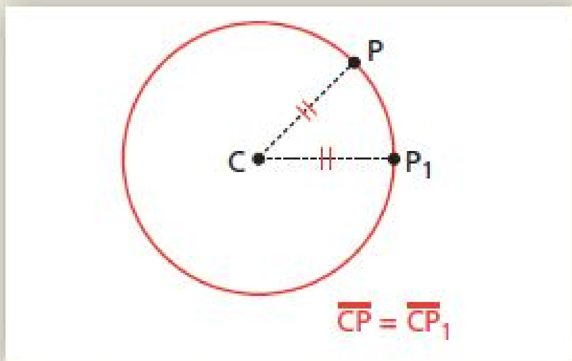
LA CIRCONFERENZA

DEFINIZIONE

Circonferenza

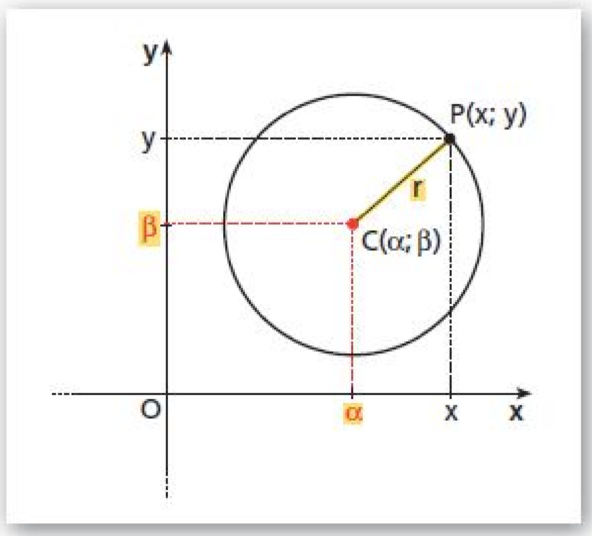
Assegnato nel piano un punto C, detto centro, si chiama circonferenza la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da C:

$$\overline{PC} = \text{costante.}$$



La distanza fra ognuno dei punti della circonferenza e il suo centro è il raggio della circonferenza.

L'equazione della circonferenza



Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali e determiniamo l'equazione della circonferenza di centro $C(\alpha;\beta)$ e raggio r

assegnati.

Un generico punto $P(x;y)$ del piano appartiene alla circonferenza se e solo se:

$\overline{PC} = r$, ossia $\overline{PC}^2 = r^2$.

Per la formula della distanza fra due punti, abbiamo:

$$\overline{PC} = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

$$\overline{PC}^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$$

Sostituendo nella relazione $\overline{PC}^2 = r^2$ otteniamo

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

che è l'equazione cercata.

Possiamo scrivere tale equazione anche in altro modo; svolgiamo i calcoli:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Ponendo

$$a = -2\alpha , \qquad b = -2\beta , \qquad c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 ,$$

otteniamo l'equazione scritta in modo più semplice:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

L'equazione trovata è di secondo grado nelle incognite x e y. Osserviamo che non è completa perché manca il termine con il prodotto xy e che i coefficienti di x^2 e di y^2 sono uguali a 1.

Le coordinate del centro e il raggio della circonferenza sono rispettivamente:

$$C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right), \qquad r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Perciò l'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenta una circonferenza di centro C se e solo se:

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0$$

Dall'equazione al grafico

Per disegnare una circonferenza è sufficiente conoscere le coordinate del centro e la misura del raggio.

ESEMPIO

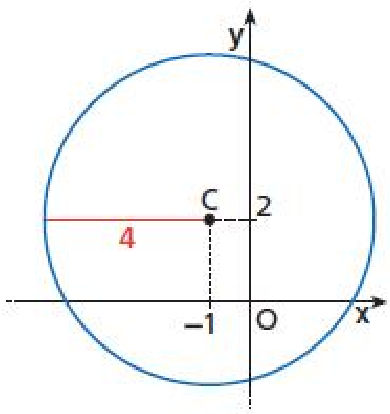
Disegniamo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$.

Determiniamo il centro C:

$$\alpha = -\frac{a}{2} = -\frac{2}{2} = -1, \qquad \beta = -\frac{b}{2} = -\frac{-4}{2} = 2 \;\rightarrow C(-1;2).$$

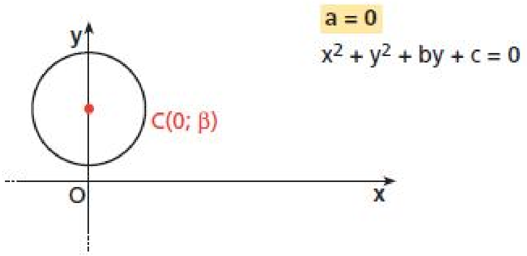
Il raggio misura: $\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{1+4+11} = \sqrt{16} = 4$.

Ecco il grafico della circonferenza:

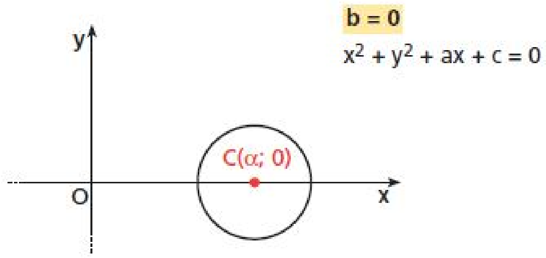


Alcuni casi particolari

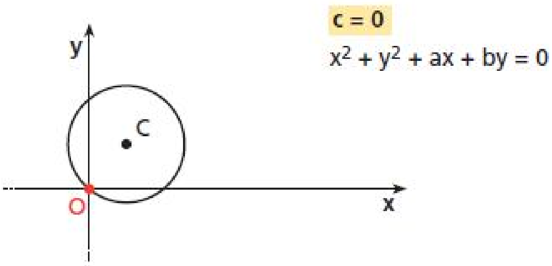
Consideriamo l'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in$ R. Esaminiamo i casi particolari in cui uno o due coefficienti o il termine noto siano nulli.



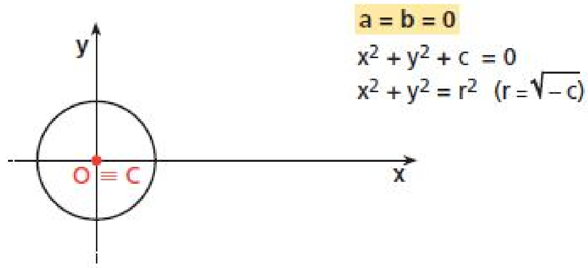
a. Si ha $\alpha = 0$, quindi $C(0; \beta)$: **il centro appartiene all'asse *y*.**



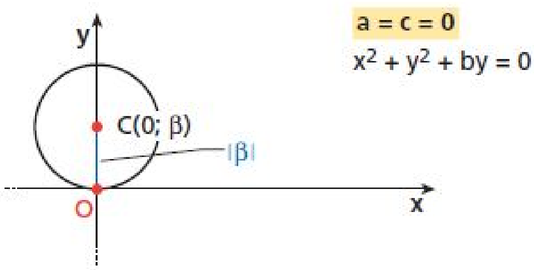
b. Si ha $\beta = 0$, quindi $C(\alpha; 0)$: **il centro appartiene all'asse *x*.**



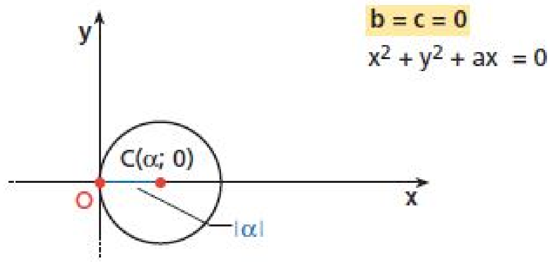
c. Le coordinate di $O(0; 0)$ verificano l'equazione, quindi **la circonferenza passa per l'origine degli assi.**



d. Si ha $\alpha = \beta = 0$, quindi $C(0; 0)$.
La circonferenza ha il centro nell'origine.



e. La circonferenza ha centro sull'asse *y* e passa per l'origine. Il raggio misura $r = \sqrt{\beta^2} = |\beta|$.



f. La circonferenza ha centro sull'asse *x* e passa per l'origine. Il raggio misura $r = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$.

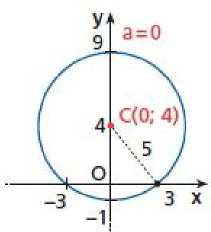
ESEMPIO

Rappresentiamo $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$

Poiché $a = 0$ e $b = -8$, si ha:

$\alpha = 0, \beta = -8 \rightarrow C(0;4)$

$r = \sqrt{0 + 16 + 9} = \sqrt{25} = 5$



ESEMPIO

Rappresentiamo $x^2 + y^2 - 16 = 0$

Poiché $a = b = 0$ si ha:

$\alpha = 0, \beta = 0 \rightarrow C(0;0)$

$r = \sqrt{-c} = \sqrt{16} = 4$