ESEMPIO 2

Dalla tabella si ricavano le mappe di Karnaugh riportate in FIGURA 2.

Le espressioni logiche delle uscite, valutate utilizzando i consueti metodi di minimizzazione, sono le seguenti:

$$M_1 = I_1 \cdot I_2 + I_1 \cdot \overline{I_3}$$

$$M_2 = I_1 \cdot I_2 + I_2 \cdot I_3$$

$$M_3 = I_1 \cdot \overline{I_2} \cdot I_3 + \overline{I_1} \cdot I_2 \cdot I_3$$

M_1

I_3 \ $I_1 I_2$	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	0

M_2

I_3 \ $I_1 I_2$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	0

M_3

I_3 \ $I_1 I_2$	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1

FIGURA 2
Mappe di Karnaugh del sistema.

3 Funzione di trasferimento

Concettualmente legata al modello matematico di un sistema è la definizione della *funzione di trasferimento* che si indica sinteticamente con f.d.t.; viene definita per un *sistema lineare* e *tempo invariante*.

▶ La **funzione di trasferimento** rappresenta il legame matematico che sussiste tra una variabile d'uscita e una variabile d'ingresso di un sistema e, più precisamente, il rapporto tra la variabile d'uscita e la variabile d'ingresso.

Si definisca la *funzione di trasferimento* tramite l'*operatore G*; se *X* è l'ingresso del sistema e *Y* l'uscita, si ha quindi la seguente relazione di validità generale:

$$G = \frac{Y}{X}$$

Nota l'espressione della f.d.t. di un sistema e definite le caratteristiche della sollecitazione a esso applicata, si ottiene per l'uscita la seguente importante relazione:

$$Y = G \cdot X$$

Stabilire il legame tra ingresso e uscita è semplice nel caso di sistemi riconducibili a reti elettriche che comprendono soltanto componenti resistivi in quanto il legame che unisce le grandezze è di semplice proporzionalità.

ESEMPIO 3

Individuare le f.d.t. per i partitori di tensione (considerando come ingresso la tensione imposta dal generatore e come uscite le tensioni prelevate dai resistori) e di corrente (considerando come ingresso la corrente imposta dal generatore e come uscite le correnti che attraversano i resistori).

Soluzione

Dal punto di vista sistemico gli schemi sono quelli rappresentati in FIGURA 3.

Si dimostra facilmente che, per il partitore di tensione, utilizzando le leggi dell'elettrotecnica si hanno le due f.d.t. seguenti:

$$G = \frac{V_1}{V} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad G = \frac{V_2}{V} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

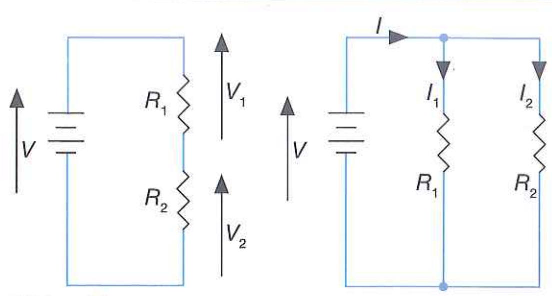

FIGURA 3
Rappresentazione sistemica dei partitori di tensione e di corrente.

Analogamente per il partitore di corrente si hanno le due f.d.t. seguenti:

$$G = \frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad G = \frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

3.1 Costante di guadagno

Quando il legame tra ingresso e uscita di un sistema è di semplice proporzionalità la f.d.t. stessa assume un valore costante che viene definito con il termine **costante di guadagno** e che si indica con G_0.

Il concetto può essere esteso anche a sistemi che non hanno queste caratteristiche; in questi casi infatti è possibile definire una costante di guadagno ma la f.d.t. del sistema non coincide con la costante di guadagno.

ESEMPIO 4

Si consideri la *rete resistiva* riportata in FIGURA 4.

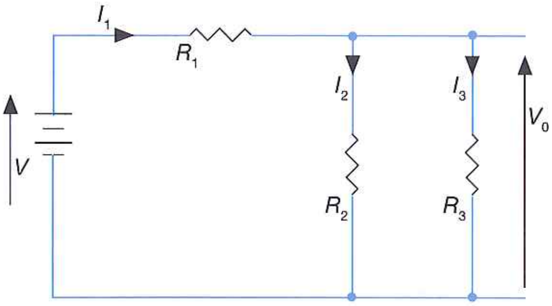

FIGURA 4
Rappresentazione sistemica della rete resistiva.

Del sistema si vuole calcolare:

a) la f.d.t. se l'uscita è la tensione ai capi del resistore R_2 e l'ingresso la tensione imposta dal generatore V;
b) la f.d.t. se l'uscita è la tensione ai capi del resistore R_3 e l'ingresso la tensione imposta dal generatore V;
c) la f.d.t. se l'uscita è la corrente I_3 e l'ingresso la corrente I_2;
d) il valore che assume la costante di guadagno in tutti e tre i casi considerando $R_1 = 80\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ ed $R_3 = 40\ \Omega$.

Soluzione

Si indichi con R_0 il parallelo tra i resistori R_2 ed R_3 e con V_p la tensione ai suoi capi.

a) Considerando come uscita la tensione ai capi di R_2 e dopo aver semplificato si osserva che ci si trova di fronte a un partitore di tensione e che pertanto la f.d.t. risulta dalla relazione:

$$G = \frac{V_0}{V} = \frac{R_0}{R_0 + R_1}$$

b) Considerando come uscita la tensione ai capi di R_3 la f.d.t. mantiene la stessa forma in quanto i resistori dai quali si preleva la tensione che rappresenta l'uscita del sistema sono posti in parallelo.

c) La f.d.t risulta dalla seguente relazione:

$$G = \frac{I_3}{I_2} = \frac{V_0/R_3}{V_0/R_2} = \frac{R_2}{R_3}$$

d) Nei primi due casi, essendo R_2 ed R_3 in parallelo, risulta di conseguenza $R_0 = 20\ \Omega$; quindi, sostituendo, la costante di guadagno vale:

$$G_0 = \frac{R_0}{R_0 + R_1} = \frac{20}{20 + 80} = 0{,}2$$

Nel terzo caso si ha invece:

$$G_0 = \frac{R_2}{R_3} = \frac{40}{40} = 1$$

4 Schema a blocchi

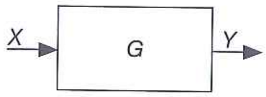

FIGURA 5
Rappresentazione grafica di un blocco orientato.

Come evidenziato in FIGURA 5 un sistema può essere rappresentato graficamente mediante *blocchi orientati* di forma rettangolare che evidenziano gli ingressi X (identificati con un *segmento orientato* verso l'interno del blocco) e le uscite Y (identificate con un *segmento orientato* verso l'esterno del blocco).

L'espressione definita dall'operatore G e cioè la f.d.t. viene inserita all'interno del blocco stesso.

I sistemi che sono oggetto di studio vengono scomposti in *sottosistemi interagenti tra loro* e rappresentabili a loro volta con un blocco orientato che, evidenziando le funzioni del blocco stesso, viene anche denominato *blocco funzionale*.

Fatte queste premesse si perviene alla seguente definizione:

▶ Lo **schema a blocchi** di un sistema è una rappresentazione grafica caratterizzata dalle seguenti proprietà:
- ciascun elemento o sottosistema interessato all'indagine viene rappresentato con un blocco funzionale;
- i singoli blocchi vengono collegati tra loro in modo opportuno per evidenziarne le interazioni.

Gli schemi a blocchi vengono utilizzati per studiare un sistema dal punto di vista funzionale e analitico.

L'importanza degli schemi a blocchi è dovuta al fatto che una rappresentazione di questo tipo consente la riduzione di schemi complessi a forme più semplici e quindi più facilmente trattabili.

Gli schemi a blocchi comprendono altri elementi grafici fondamentali come *nodi derivatori* e *nodi sommatori* la cui rappresentazione viene mostrata in FIGURA 6.

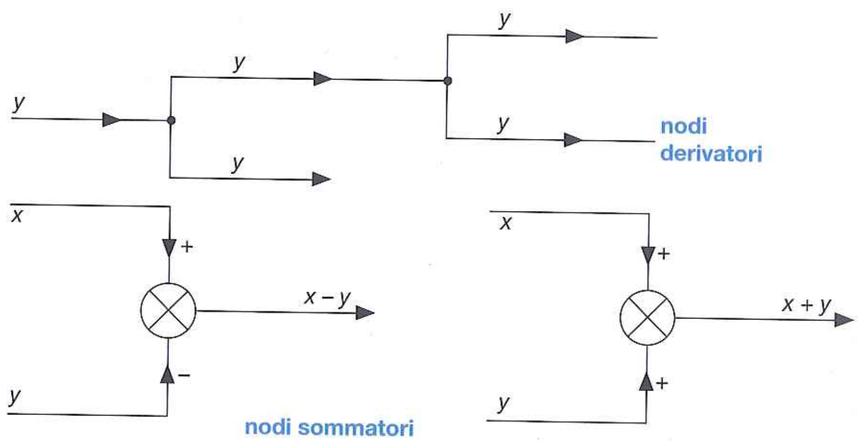

FIGURA 6
Rappresentazione grafica di nodi derivatori e nodi sommatori.

I **nodi derivatori** (identificati con lo stesso simbolo con cui si rappresentano i punti di connessione negli schemi elettrici) prelevano il segnale che entra nel nodo stesso per ottenere segnali uscenti che hanno le medesime caratteristiche di quello entrante.

I **nodi sommatori** (identificati con lo stesso simbolo con cui si rappresentano le lampade negli schemi elettrici) sommano algebricamente i segnali che entrano nel nodo stesso; la somma è il segnale uscente; i simboli di somma e di sottrazione vengono posti vicino alle frecce entranti.

4.1 Algebra degli schemi a blocchi

Stabilisce le regole che consentono la semplificazione degli schemi stessi.

In FIGURA 7 vengono evidenziate le principali tipologie di collegamento tra i blocchi ovvero i collegamenti:

- *in serie*;
- *in parallelo*;
- *in retroazione*.

A fianco vengono riportati i corrispondenti blocchi equivalenti (con le relative f.d.t. complessive) che consentono la semplificazione degli schemi.

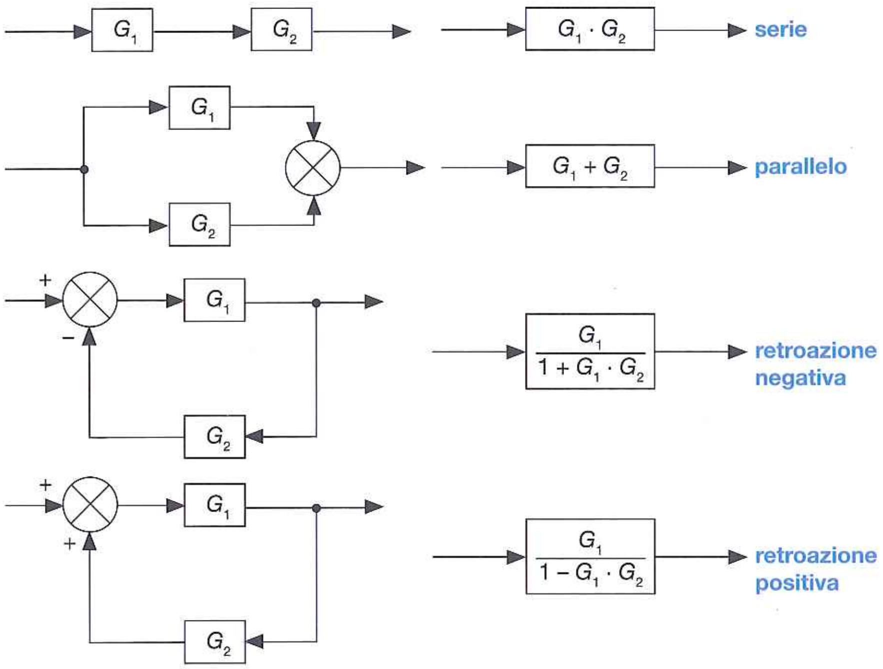

FIGURA 7
Principali tipologie di collegamento tra i blocchi.

Due o più blocchi formano un **collegamento in serie** se il segnale in uscita da ciascun blocco rappresenta il segnale d'ingresso per il blocco successivo.

Due o più blocchi formano un **collegamento in parallelo** se in ingresso a ciascun blocco viene applicato il medesimo segnale e se l'uscita risulta dalla somma delle uscite dei singoli blocchi.

Un **collegamento in retroazione** è formato da due blocchi che vengono denominati rispettivamente *blocco di andata* e *blocco di ritorno* (o *blocco di retroazione*).

Il segnale attraversa il blocco di andata dall'ingresso verso l'uscita, il blocco di ritorno in senso contrario; il segnale d'uscita viene prelevato e inviato in ingresso al blocco di ritorno; l'uscita di quest'ultimo entra in un nodo sommatore insieme al segnale di ingresso.

La *retroazione* viene definita *positiva* se i due segnali si sommano, *negativa* se ne viene effettuata la differenza.

ESEMPIO 5

Si consideri un *sistema per la misura della temperatura di un ambiente* costituito da un *sensore di temperatura integrato* (componente elettronico sensibile alla temperatura) la cui uscita (in tensione) viene modificata utilizzando un *amplificatore* di segnale.

Si richiede di rappresentare lo schema a blocchi del sistema considerando come uscita la tensione amplificata e come ingresso la temperatura dell'ambiente in cui il sensore è immerso.

Soluzione

Il sistema può essere rappresentato come in FIGURA **8** ossia con due blocchi funzionali collegati in serie che rappresentano il *sensore* e l'*amplificatore* e, visto nel suo complesso, con un solo blocco funzionale.

L'*ingresso* del sistema è la temperatura dell'ambiente θ; l'uscita del sensore V_θ rappresenta l'ingresso dell'amplificatore; l'*uscita* del sistema V_a è la tensione prodotta dall'amplificatore di segnale.

Con G_1 e G_2 vengono identificate le f.d.t. dei singoli blocchi, con G la f.d.t. complessiva che, essendo i blocchi collegati in serie, risulta dal prodotto delle funzioni di trasferimento dei singoli blocchi.

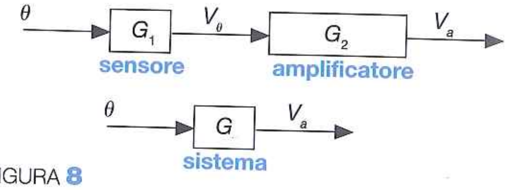

FIGURA **8**
Rappresentazione a blocchi del sistema.

ESEMPIO 6

Dopo aver individuato la tipologia dei blocchi, si vuole determinare la f.d.t. complessiva del sistema rappresentato in FIGURA **9**.

Soluzione

Nello schema sono riconoscibili due blocchi G_1 e G_2 collegati in parallelo; il blocco equivalente è disposto in serie al blocco G_3.

Utilizzando le regole di semplificazione dei blocchi

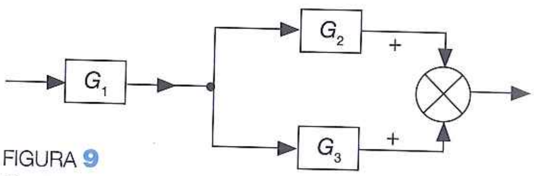

FIGURA **9**
Rappresentazione a blocchi del sistema.

la f.d.t. complessiva del sistema risulta pertanto dalla relazione:

$$G = G_1 \cdot (G_2 + G_3)$$

ESEMPIO 7

Dopo aver individuato la tipologia dei blocchi, si vuole determinare la f.d.t. complessiva del sistema rappresentato in FIGURA **10**.

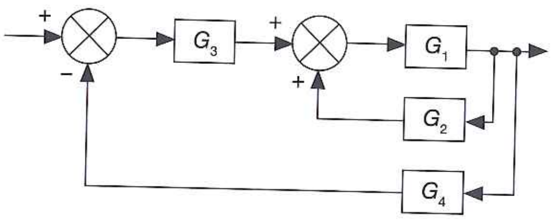

FIGURA **10**
Rappresentazione a blocchi del sistema.

Soluzione

Nello schema sono riconoscibili due blocchi G_1 e G_2 collegati in retroazione positiva; il blocco equivalente è disposto in serie al blocco G_3; il blocco equivalente della serie forma con il blocco G_4 un ulteriore collegamento di due blocchi in retroazione (questa volta negativa).

Utilizzando le regole di semplificazione dei blocchi la f.d.t. complessiva del sistema risulta pertanto dalla relazione:

$$G = \frac{G_3 + \dfrac{G_1}{1 - G_1 G_2}}{1 + \left(G_3 + \dfrac{G_1}{1 - G_1 G_2}\right) G_4}$$

ESEMPIO 8

Si vuole determinare la f.d.t. complessiva del sistema rappresentato in FIGURA **11** e la costante di guadagno corrispondente.

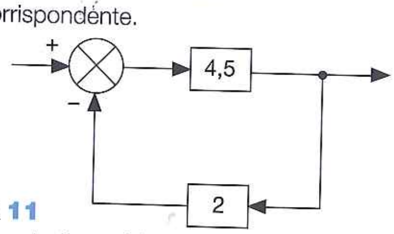

FIGURA **11**
Rappresentazione a blocchi del sistema.

Soluzione

Il sistema è costituito da due blocchi collegati in retroazione negativa; poiché la f.d.t. dei singoli blocchi coincide con la costante di guadagno risulta anche che la funzione di trasferimento del sistema nel suo complesso coincide con la costante di guadagno; con $G_1 = 4{,}5$ e $G_2 = 2$ risulta quindi:

$$G = G_0 = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} = \frac{4{,}5}{1 + 4{,}5 \cdot 2} = 0{,}45$$

4.2 Applicazioni alle reti elettriche

Gli schemi a blocchi possono essere utilizzati anche per lo studio delle *reti elettriche*.

I collegamenti di resistori in serie e in parallelo possono essere rappresentati con gli schemi a blocchi riportati in FIGURA 12.

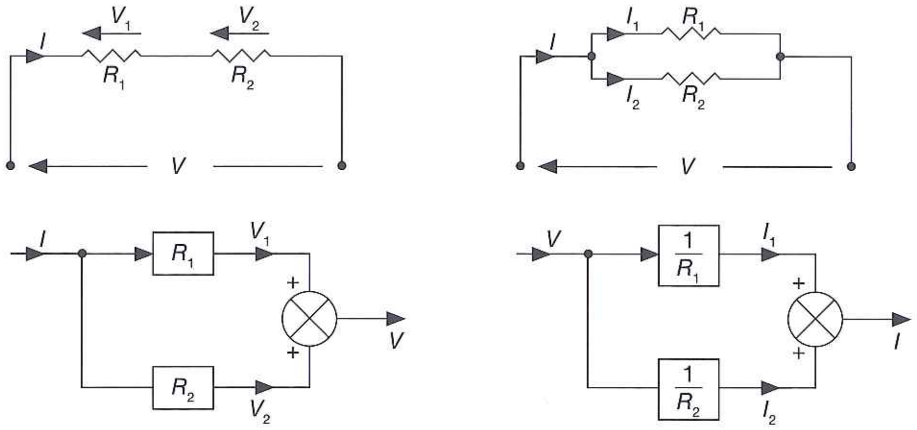

FIGURA 12
Schemi a blocchi di collegamenti di resistori in serie e in parallelo.

Il **collegamento in serie** è caratterizzato dalla presenza di un punto di diramazione per la corrente (in quanto i resistori sono attraversati dalla medesima corrente) e di un nodo sommatore per le tensioni (in quanto la tensione complessiva ai capi della serie risulta dalla somma delle tensioni a cui sono sottoposti i singoli resistori); la f.d.t. intesa come rapporto tra tensione e corrente è proprio la somma delle resistenze dei due resistori.

Il **collegamento in parallelo** è caratterizzato dalla presenza di un punto di diramazione per la tensione (in quanto la tensione ai capi dei due resistori è la medesima) e di un nodo sommatore per le correnti (in quanto la corrente complessiva risulta dalla somma delle correnti che attraversano i singoli resistori); la f.d.t. intesa come rapporto tra corrente e tensione è proprio la somma delle conduttanze dei due resistori.

5 Componenti elementari dei sistemi

I componenti elementari dei sistemi si classificano in relazione alle grandezze coinvolte nel loro studio; si hanno così componenti di tipo *elettrico*, *meccanico*, *idraulico* e *termico*.

Per ciascun tipo di sistema possono essere individuate le grandezze equivalenti elencate nella TABELLA 2.

Sistema	Grandezze equivalenti	
ELETTRICO	Tensione	Corrente
MECCANICO	Forza	Velocità
IDRAULICO	Pressione	Portata volumetrica
TERMICO	Temperatura	Flusso termico

TABELLA 2
Grandezze equivalenti nei diversi sistemi.

Componenti di diversa natura possono essere confrontati considerando le proprietà elementari che, utilizzando la terminologia propria dei sistemi elettrici, vengono denominate rispettivamente *resistiva*, *capacitiva* e *induttiva*.

Sfruttando l'equivalenza tra le grandezze si evidenziano nella TABELLA **3** i componenti elementari che, nei diversi sistemi, godono delle proprietà citate.

Sistema	Componenti equivalenti		
ELETTRICO	Resistore	Condensatore	Induttore
MECCANICO	Smorzatore	Molla	Massa
IDRAULICO	Condotta	Serbatoio	Condotta
TERMICO	Scambiatore di calore	Massa	

TABELLA **3**
Componenti equivalenti nei diversi sistemi.

5.1 Modello equivalente

Le relazioni che legano le grandezze caratteristiche dei componenti nei sistemi elettrici sono le seguenti:

$V = R \cdot I$, per il resistore

$I = C \cdot \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$, per il condensatore

$V = L \cdot \dfrac{\Delta I}{\Delta t}$, per l'induttore

Queste relazioni evidenziano che nei sistemi elettrici:

- la *proprietà resistiva* è la capacità del componente di opporsi al passaggio della corrente indotta dall'applicazione di una tensione;
- la *proprietà capacitiva* è la capacità del componente di opporsi a variazioni di tensione (non a caso la corrente che attraversa un condensatore alimentato in continua è nulla);
- la *proprietà induttiva* è la capacità del componente di opporsi a variazioni di corrente (non a caso la tensione che si manifesta ai capi di un induttore alimentato in continua è nulla).

La resistenza R, la capacità C e l'induttanza L sono parametri funzionali per i componenti elettrici; a essi, nei sistemi di diversa natura, corrispondono i parametri funzionali equivalenti riportati nella TABELLA **4**.

Sistema	Parametri equivalenti		
ELETTRICO	Resistenza elettrica	Capacità elettrica	Induttanza
MECCANICO	Coefficiente di attrito viscoso	Cedevolezza	Massa
IDRAULICO	Resistenza idraulica	Capacità idraulica	Inerzia idraulica
TERMICO	Resistenza termica	Capacità termica	

TABELLA **4**
Parametri funzionali equivalenti nei diversi sistemi.

Le relazioni causa/effetto e le f.d.t. di ciascun componente si ricavano prendendo come riferimento le relazioni proprie dei componenti elementari dei sistemi elettrici e sostituendo in esse grandezze e parametri equivalenti.

ESEMPIO 9

Ricavare la f.d.t. per i componenti che, nei diversi sistemi, godono della proprietà resistiva:

a) resistori;
b) smorzatori;
c) condotte;
d) scambiatori di calore.

Soluzione

a) Per il *resistore la corrente I* è la causa, la *tensione V* è l'effetto, la *resistenza elettrica R* è la f.d.t. corrispondente; risulta:

$$\frac{V}{I} = R$$

b) Per lo *smorzatore* la *velocità v* è la causa, la *forza F* è l'effetto, il *coefficiente di attrito viscoso* β è la f.d.t. corrispondente; risulta:

$$\frac{F}{v} = \beta$$

Il coefficiente di attrito viscoso è proporzionale alla velocità solo se il regime del moto relativo dell'aria rispetto al corpo è *laminare* (quando non si formano vortici); se il regime è *turbolento* (quando si formano dei vortici) la forza diventa proporzionale al quadrato della velocità.

Più in generale nei sistemi meccanici si può definire l'*attrito viscoso* con il termine *resistenza meccanica* che si indica con R_M; la relazione precedente può assumere pertanto la forma seguente:

$$\frac{F}{v} = R_M$$

L'attrito viscoso non è l'unica forma di attrito presente nei sistemi meccanici; esso rende infatti conto della sola resistenza all'avanzamento opposta dall'aria; le altre forme di attrito sono l'*attrito volvente* (che rende conto del *rotolamento* di un corpo in movimento su una superficie) e l'*attrito radente* (che rende conto dello *strisciamento* di un corpo in movimento su una superficie).

Se il moto del corpo non è traslatorio ma rotatorio l'attrito esprime il rapporto tra una coppia C e una velocità angolare ω; risulta pertanto:

$$\frac{C}{\omega} = R_M$$

c) Per la *condotta* la *portata volumetrica Q* è la causa, la *pressione p* è l'effetto, la *resistenza idraulica* R_L è la f.d.t. corrispondente; risulta:

$$\frac{p}{Q} = R_L$$

d) Per lo *scambiatore di calore* il *flusso termico Q* è la causa, la *temperatura* θ è l'effetto, la *resistenza termica* R_T è la f.d.t. corrispondente; risulta:

$$\frac{\theta}{Q} = R_T$$

ESEMPIO 10

Individuare la relazione causa/effetto per i componenti che, nei diversi sistemi, godono della proprietà capacitiva:

a) condensatori;
b) molle;
c) serbatoi;
d) masse.

Soluzione

a) Per il *condensatore* la relazione causa/effetto è la seguente:

$$I = C \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Per individuare le relazioni causa/effetto negli altri componenti si sfruttano le equivalenze tra le grandezze caratteristiche.

b) Per la *molla* risulta:

$$v = \frac{1}{K} \cdot \frac{\Delta F}{\Delta t}$$

essendo K la *costante della molla* (è in genere il parametro che viene fornito per definire le caratteristiche di una molla).

Il termine $1/K$ (inverso della costante della molla) è la *cedevolezza* della molla, rappresenta la sua capacità meccanica e si può indicare con C_M; pertanto la relazione precedente può essere espressa nel modo seguente:

$$v = C_M \cdot \frac{\Delta F}{\Delta t}$$

La costante della molla rappresenta il rapporto tra la forza applicata e la variazione di lunghezza x della molla stessa rispetto alla posizione di riposo; risulta la seguente relazione:

$$F = K \cdot x$$

La relazione è valida per le *molle traslazionali* (quelle in cui lo spostamento avviene in direzione dell'asse); per le *molle torsionali* (quelle che sottoposte a una coppia C subiscono uno spostamento angolare φ rispetto all'asse) si ha la seguente relazione:

$$T = K \cdot \varphi$$

c) Per il *serbatoio* risulta:

$$Q = C_L \cdot \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

essendo C_L la *capacità idraulica* del serbatoio.

d) Per la *massa* risulta:

$$Q = C_T \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

essendo C_T la *capacità termica* della massa.

ESEMPIO 11

Individuare la relazione causa/effetto per i componenti che, nei diversi sistemi, godono della proprietà induttiva:

a) induttori;
b) masse;
c) condotte.

Soluzione

a) Per l'*induttore* la relazione causa/effetto è la seguente:

$$V = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Per individuare le relazioni causa/effetto negli altri componenti si sfruttano le equivalenze tra le grandezze caratteristiche.

b) Per la massa risulta:

$$F = M \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

essendo M la *massa* del corpo in movimento di *moto traslatorio*.

In generale, considerando anche la possibilità di *moto rotatorio*, alla massa del corpo si può sostituire l'*inerzia meccanica* J_m che assume significati differenti in relazione al tipo di movimento della massa; in caso di moto traslatorio è il rapporto tra una forza e un'accelerazione lineare ovvero una *massa*; se è rotatorio attorno a un asse si ha un rapporto tra una coppia e un'accelerazione angolare ovvero un *momento d'inerzia* (grandezza che tiene conto della distribuzione della massa attorno all'asse di rotazione).

La relazione precedente può pertanto assumere la seguente forma equivalente:

$$F = J_m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

c) Per la *condotta* risulta:

$$p = I_L \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

essendo I_L l'*inerzia idraulica* della condotta.

6 Analogie

Lo studio di *sistemi di natura non elettrica* è quasi sempre riconducibile, con opportuni artifici, allo studio di *sistemi di natura elettrica* ai quali, per questo motivo, viene fatto particolare riferimento.

Questo modo di operare porta a introdurre la definizione di *sistemi analoghi*.

▶ Due sistemi si dicono **analoghi** se sono rappresentati dal medesimo modello matematico; di tale analogia godono anche le variabili e i parametri corrispondenti rispetto al modello adottato.

Dal punto di vista pratico l'utilizzazione dell'analogia consente lo studio del comportamento di sistemi complessi ricorrendo allo studio di modelli di diversa natura fisica e di più semplice realizzazione.

6.1 Analogie con i sistemi meccanici

Per poter ricondurre lo studio di un sistema meccanico allo studio di un sistema elettrico si devono stabilire delle corrispondenze di validità generale tra le grandezze significative proprie dei componenti elementari dei sistemi meccanici e dei componenti elementari dei sistemi elettrici.

Il procedimento è stato utilizzato in precedenza per ricavare le relazioni causa-effetto e le f.d.t. dei componenti elementari nei diversi tipi di sistemi.