Fondamenti di ALGEBRA BOOLEANA

- Definizione
- Operatori AND, OR, NOT
- Proprietà degli operatori
- Teoremi dell’algebra booleana
- Espressioni booleane

Algebra di Boole:

• Definita da George Boole nel 1854 per la manipolazione di espressioni logiche attraverso modelli matematici

• Opera su variabili che possono assumere solamente DUE valori: 0 e 1 (***variabili logiche booleane***)

• Con queste variabili si possono rappresentare **eventi tipicamente binari** (affermazioni che possono essere **VERE** oppure **FALSE**)

• Utilizzando le variabili booleane, si costruiscono le ***funzioni booleane o logiche***, definite attraverso opportune **tavole della verità**.

Una funzione logica di variabili booleane si può rappresentare con la notazione:

$$F(x_1, x_2, x_3\ldots)$$

definita, ad esempio, attraverso la seguente tavola della verità:

x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Se ci sono n variabili, il numero delle possibili combinazioni è 2^n.

Per ogni combinazione, la funzione può assumere 2 valori.

Quindi, si possono avere 2^{2^n} risposte diverse con n variabili.

Esempio:

Un treno parte **se e solo se**:

- il semaforo è verde

E

- il capotreno dà il via.

Le *variabili logiche* sono:

S: vale **0** / **1** (il semaforo **non è verde** / **verde**)

C: vale **0** / **1** (il capotreno **non dà** / **dà** il via)

e la *funzione logica*

T, che vale **0** / **1** (il treno **non parte** / **parte**)

è definita attraverso la tavola:

S	C	T
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Operatori logici

Operatore AND (simbolo ·)

Definito attraverso la tavola:

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Operatori logici

Operatore OR (simbolo +)

Definito attraverso la tavola:

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Operatori logici

Operatore NOT (simbolo ¯)

Definito attraverso la tavola:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

PROPRIETA' DEGLI OPERATORI

Proprietà dell'involuzione di NOT:

NOT (NOT(A)) = A

Infatti:

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
0	1	0
1	0	1

PROPRIETA' DEGLI OPERATORI

Proprietà dell'idempotenza:

$$A + A = A \qquad\qquad A \cdot A = A$$

Infatti:

A	A	A + A
0	0	0
1	1	1

A	A	A · A
0	0	0
1	1	1

PROPRIETA' DEGLI OPERATORI

Proprietà dell'elemento neutro per OR e AND:

$$A + 0 = A \qquad\qquad A \cdot 1 = A$$

Infatti:

A	0	A + 0
0	0	0
1	0	1

A	1	A · 1
0	1	0
1	1	1

PROPRIETA' DEGLI OPERATORI

Proprietà dell'elemento nullo per OR e AND:

$$A + 1 = 1 \qquad\qquad A \cdot 0 = 0$$

Infatti:

A	1	A + 1
0	1	1
1	1	1

A	0	A · 0
0	0	0
1	0	0

PROPRIETA' DEGLI OPERATORI

Proprietà dell'elemento complementare per OR e AND:

$$A + \overline{A} = 1 \qquad\qquad A \cdot \overline{A} = 0$$

Infatti:

A	$\overline{A}$	$A + \overline{A}$
0	1	1
1	0	1

A	$\overline{A}$	$A \cdot \overline{A}$
0	1	0
1	0	0

PROPRIETA' DEGLI OPERATORI

Proprietà commutativa di OR e AND:

$$A + B = B + A \qquad\qquad A \cdot B = B \cdot A$$

Proprietà associativa di OR e AND:

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$$

Proprietà distributiva di OR e AND:

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

ALCUNI TEOREMI DELL'ALGEBRA BOOLEANA

Teoremi dell'assorbimento

$$A \cdot (A + B) = A \qquad\qquad A + (A \cdot B) = A$$

Teoremi di De Morgan

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \qquad\qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Operatori logici estesi

Operatore NAND (AND negato)

Definito attraverso la tavola:

A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Operatori logici estesi

Operatore NOR (OR negato)

Definito attraverso la tavola:

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Operatori logici estesi

Operatore OR esclusivo (EXOR, simbolo $\oplus$)

Definito attraverso la tavola:

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Operatori logici estesi

Operatore OR esclusivo negato (EXNOR)

Definito attraverso la tavola:

A	B	$\overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Funzioni booleane

Come detto in precedenza, sono definite tramite tabelle di verità, nelle quali si indica il valore assunto dalla funzione per ogni possibile combinazione delle variabili.

Normalmente sono rappresentate nella forma di espressioni in cui le variabili booleane sono combinate tramite gli operatori fondamentali:

Esempio:

$$F(x_1, x_2) = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1$$

Costruzione di tabelle della verità delle funzioni booleane

Per costruire la tabella della verità di un'espressione booleana occorre:

- **semplificare, se possibile, l'espressione mediante i teoremi dell'algebra booleana**
- **calcolare i termini parziali della funzione riducendoli alle operazioni fondamentali**

Esempio: trovare la tabella della verità della funzione:

$$F(\mathrm{a, b, c}) = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} + \mathrm{c}$$

a	b	c	$a \cdot b$	$a \cdot b + c$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1